

УДК 517.53 : 517.574

Б. Н. Хабибуллин, Н. Р. Таминдарова

Распределение нулей и масс голоморфных и субгармонических функций.

I. Условия типа Адамара и Бляшке

Пусть M — субгармоническая функция-мажоранта в области D комплексной плоскости \mathbb{C} с мерой Рисса ν_M , f — ненулевая голоморфная в D функция, $\log |f| \leq M$ на D и функция f обращается в нуль на последовательности точек $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots} \subset D$ (соответственно $u \not\equiv -\infty$ — субгармоническая функция с мерой Рисса, или распределением масс, ν_u , $u \leq M$ на D). Тогда ограничения на рост меры Рисса ν_M функции M вблизи границы области D влекут за собой определённые ограничения на распределение точек последовательности Z (соответственно на распределение масс ν_u). Количественная форма исследования этого явления даётся сразу в субгармоническом обрамлении. Устанавливаются также и результаты в обратном направлении. Детально разобраны случаи, когда D — это \mathbb{C} , единичный круг, внешность этого круга, концентрическое кольцо, а M — радиальная функция; D — регулярная область, а мажоранта M постоянна на линиях уровня функции Грина области D ; D — область гиперболического типа, а M — суперпозиция выпуклой функции с функциями, зависящими от гиперболического радиуса; D — регулярная область, а M — суперпозиция выпуклой функции с функцией, зависящей от расстояния до границы ∂D области D или до некоторого подмножества границы ∂D . Все основные результаты и их реализации в более или менее конкретных ситуациях новые не только для субгармонических функций, но и для голоморфных, уже в случае, когда D — это \mathbb{C} , единичный круг, кольцо и т. д. Таким образом, эта работа никоим образом не обзор.

Библиография: 68 названий

Distribution of zeros (masses) for holomorphic (subharmonic) functions. I. Hadamard- and Blaschke-type conditions

Let M be a subharmonic function on a domain D in the complex plane \mathbb{C} with the Riesz measure ν_M . Let f be a non-zero holomorphic function on D such that $\log |f| \leq M$ on D and the function f vanish on a sequence $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots} \subset D$ ($u \not\equiv -\infty$ be a subharmonic function on D with the Riesz measure or the mass distribution ν_u , and $u \leq M$ on D resp.). Then restrictions on the growth of the Riesz measure ν_M of the function M near the boundary of the domain D entail certain restrictions on the distribution of points of the sequence Z (to the mass distribution ν_u resp.). A quantitative form of research of this phenomenon is given immediately in the subharmonic framework. We also establish results in the inverse direction. We investigated in detail the cases when D is \mathbb{C} , the unit disk, exterior of the unit disk, a concentric annulus, and M is a radial function; D is a regular domain and M are constant on the level lines of Green's function of this domain D ; D is a domain of hyperbolic type, and M are the superpositions of convex functions with functions that depend on the hyperbolic radius; D is a regular domain

and M is the superposition of convex functions with a function dependent on the distance to some subset of the boundary of the domain D . All our main results and their implementation in more or less concrete situations are new not only for subharmonic functions u , and also for holomorphic functions f even in the case when D is \mathbb{C} , the unit disk, an annulus etc. Thus this is not a review.

Ключевые слова: голоморфная функция, последовательность нулей, субгармоническая функция, мера Рисса, мера Йенсена

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ	2
1. Введение.....	3
1.1. Истоки	3
1.2. Структура.....	5
1.3. Основные обозначения, определения и соглашения.....	6
1.3.1. <u>Множества</u>	6
1.3.2. <u>Функции</u>	6
1.3.3. <u>Меры</u>	7
1.3.4. <u>Нули голоморфных функций</u>	7
1.3.5. <u>Некоторые соглашения</u>	8
1.3.6. <u>Тестовые субгармонические функции</u>	8
1.4. Частные случаи Основной Теоремы.....	9
2. Основные результаты	10
2.1. δ -субгармонические функции [9]–[10]	10
2.2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА	11
2.3. Меры и потенциалы Йенсена.....	12
2.4. Тестовые функции и потенциалы Йенсена	14
2.4.1. <u>Продолжение тестовых функций в $D \setminus \{z_0\}$</u>	15
2.4.2. <u>Продолженная функция — предел потенциалов Йенсена</u> ...	18
2.4.3. <u>Одна гипотеза о последовательности выметаний мер</u>	19
2.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ	20
2.6. Субгармоническая мажоранта M	22
3. Обратные теоремы	22
3.1. Обращение с финитными тестовыми функциями	23
3.2. Обращения с более узкими классами тестовых функций	29
3.2.1. <u>Обращение с функциями Грина</u>	29
3.2.2. <u>Обращение с аналитическими и полиномиальными дисками</u>	32
4. Радиальные мажоранты M	33
4.1. Радиальные субгармонические функции.....	33
4.2. Случай $D = \mathbb{C}$	35
4.3. Случай $D = \mathbb{D}$	37
4.4. Случай $D = A(r_1, r_2)$ — кольцо	40

5. Тестовые функции.....	43
5.1. Построение тестовых функций.....	43
5.1.1. <u>На основе гармонических функций</u>	44
5.1.2. <u>На основе гармонической и субгармонической функций</u>	44
5.1.3. <u>На основе супер- и субгармонической функций</u>	45
5.1.4. <u>Гиперболический радиус и тестовые функции</u>	45
5.1.5. <u>Функции расстояния и тестовые функции</u>	47
5.1.6. <u>Тестовые функции для \mathbb{C} и для проколотой в точках \mathbb{C}_∞</u> ..	49
5.2. Операции над тестовыми функциями.....	49
6. Основные результаты для нерадиальных мажорант.....	50
6.1. Операторы Лапласа и набла для суперпозиций и произведений.....	50
6.2. Субгармонические мажоранты-суперпозиции.....	53
6.2.1. <u>Мажоранта-суперпозиция с функцией Грина</u>	54
6.2.2. <u>Мажоранта-суперпозиция с гиперболическим радиусом</u>	58
6.2.3. <u>Мажоранты от расстояния до подмножества на ∂D</u>	59
6.2.4. <u>Перспективы и заключительные замечания</u>	66
Список литературы.....	67

§ 1. Введение

1.1. Истоки. Исторически первой отправной точкой нашего исследования можно, по-видимому, считать элементарное следствие Теоремы Э. Безу (XVIII в.), которое переформулируем в подходящей форме: *многочлен от комплексной переменной, растущий не быстрее n -ой степени модуля этой переменной, не может иметь более чем n корней (нулей) даже с учётом кратности на комплексной плоскости \mathbb{C}* . Последующие ключевые этапы — классические результаты конца XIX—начала XX вв. о распределении нулей целых функций на \mathbb{C} и голоморфных функций в единичном круге $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ при ограничении на рост их модуля соответственно при стремлении $z \in \mathbb{C}$ к ∞ и при приближении $z \in \mathbb{D}$ к единичной окружности $\partial\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — границе круга \mathbb{D} . Для $0 < r \leq +\infty$ положим $D(r) := r\mathbb{D} := \{rz : z \in \mathbb{D}\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ — открытый круг радиуса r с центром в нуле. Используем понятия из [1]–[8].

ТЕОРЕМА А (с условием Ж. Адамара). Пусть $0 < R_0 < +\infty$, M — субгармоническая в \mathbb{C} функция с мерой Рисса ν_M , а f — ненулевая целая функция, обращающаяся в нуль на последовательности $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots} \subset \mathbb{C}$ и $\log |f| \leq M$ на \mathbb{C} (почечно). Тогда из условия Адамара для мер с показателем $q > 0$

$$\int_{\mathbb{C} \setminus D(R_0)} \frac{1}{|z|^q} d\nu_M(z) < +\infty \quad (1.1)$$

следует условие Адамара для последовательностей с тем же показателем q :

$$\sum_{z_k \in \mathbb{C} \setminus D(R_0)} \frac{1}{|z_k|^q} < +\infty. \quad (1.2)$$

Здесь *тестовая* подынтегральная функция в (1.1)

$$z \mapsto \frac{1}{|z|^q}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus D(R_0),$$

дающая и слагаемые в (1.2), *положительна* в $\mathbb{C} \setminus D(R_0)$, *стремится к нулю* при $z \rightarrow \infty$ и *субгармоническая* в «проколотой» плоскости $\mathbb{C} \setminus \{0\} \supset \mathbb{C} \setminus D(R_0)$.

ТЕОРЕМА В (с условием В. Бляшке). Пусть $0 < r_0 < 1$, M — субгармоническая в \mathbb{D} функция с мерой Рисса ν_M , а f — ненулевая голоморфная функция в круге \mathbb{D} , обращающаяся в нуль на последовательности $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots} \subset \mathbb{D}$ и $\log |f| \leq M$ на \mathbb{D} (почечно). Тогда из условия Бляшке для мер в одной из эквивалентных друг другу форм:

$$\left(\int_{\mathbb{D} \setminus D(r_0)} \log \frac{1}{|z|} d\nu_M(z) < +\infty \right) \iff \left(\int_{\mathbb{D} \setminus D(r_0)} (1 - |z|) d\nu_M(z) < +\infty \right). \quad (1.3)$$

следует условие Бляшке для последовательностей в любой из эквивалентных друг другу форме

$$\left(\sum_{z_k \in \mathbb{D} \setminus D(r_0)} \log \frac{1}{|z_k|} < +\infty \right) \iff \left(\sum_{z_k \in \mathbb{D} \setminus D(r_0)} (1 - |z_k|) < +\infty \right). \quad (1.4)$$

Здесь *тестовые* подынтегральные функции в (1.3)

$$z \mapsto \log \frac{1}{|z|}, \quad z \mapsto 1 - |z|, \quad z \in \mathbb{D} \setminus D(r_0), \quad (1.5)$$

дающие и слагаемые в (1.4), также *положительны* и *ограничены* в $\mathbb{D} \setminus D(r_0)$, *стремятся к нулю* при приближении изнутри \mathbb{D} к $\partial\mathbb{D}$, а первая из них¹ — функция Грина для круга \mathbb{D} с полюсом в нуле — гармоническая, а стало быть и *субгармоническая* в «проколоте» круге $\mathbb{D} \setminus \{0\} \supset \mathbb{D} \setminus D(r_0)$.

ОСНОВНОЙ ВОПРОС. Пусть $D \subset \mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — область, $D \neq \mathbb{C}_\infty$, D_0 — её относительно компактная подобласть, M — субгармоническая функция в D с мерой Рисса ν_M , f — голоморфная функция в D , обращающаяся в нуль на последовательности $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots} \subset D$ и $\log |f| \leq M$ на $D \setminus D_0$ (почечно). Для каких тестовых функций $v \geq 0$ на $D \setminus D_0$ при ненулевой функции f (пишем $f \neq 0$) справедлива импликация

$$\left(\int_{D \setminus D_0} v d\nu_M < +\infty \right) \implies \left(\sum_{z_k \in D \setminus D_0} v(z_k) < +\infty \right) ? \quad (1.6)$$

Отрицание подобной импликации позволяет получать теоремы единственности, а именно: если ряд в (1.6) расходится, а интеграл в (1.6) конечен, то из $\log |f| \leq M$ на $D \setminus D_0$ следует, что f — нулевая функция (пишем $f = 0$).

¹Замена второй супергармонической функции в (1.5) на эквивалентную ей в данных вопросах функцию $z \mapsto \frac{1}{|z|} - 1$ также преобразует её в субгармоническую с сохранением остальных свойств: положительность и стремление к нулю при приближении изнутри к $\partial\mathbb{D}$.

Наше Следствие 1.1, сформулированное в разделе 1.4, даёт следующий

ОТВЕТ. Достаточно, чтобы функция v была положительной субгармонической в открытой окрестности множества $D \setminus D_0$ и стремилась к нулю при приближении изнутри области D к её границе ∂D в \mathbb{C}_∞ .

Более общее утверждение — Теорема 1 из подраздела 1.4, в которой рассматриваются равномерно ограниченные сверху в $D \setminus D_0$ классы *тестовых* субгармонических функций $v \geq 0$ и получены равномерные относительно такого класса оценки сумм из (1.6) через интегралы из (1.6). Основной Теоремой из раздела 2.2 охвачен и случай произвольной δ -субгармонической функции-мажоранты M [9]–[10], т. е. разности субгармонических функций.

Основные результаты нашей работы частично были анонсированы в [11]. Библиографические ссылки ниже не претендуют на сколь-нибудь близкое к полноте освещение истории тематики, связанной с содержанием нашей работы. Так, ссылка на источник означает, что в нём содержатся и дальнейшие дополнительные сведения. Некоторые ранее полученные результаты, тесно связанные с нашими Следствием 1.1 и Теоремой 1 изложены в [12]–[38]. В [12] — история условия Бляшке; в [13]–[16] — круг \mathbb{D} и радиальная мажоранта M ; в [17]–[24] — функции на \mathbb{C} ; в [25]–[28] — круг и нерадиальная мажоранта, равная суперпозиции некоторой положительной убывающей неограниченной функции на $(0, +\infty)$ с функцией расстояния до некоторого подмножества единичной окружности $\partial\mathbb{D}$; в [29] — область-дополнение до \mathbb{C}_∞ конечного числа отрезков на \mathbb{R} и мажоранта, задаваемая через отрицательные степени расстояний до этих отрезков и их концов; [30] — область D в \mathbb{C}_∞ , содержащая точку ∞ и совпадающая с объединением всех открытых кругов некоторого фиксированного радиуса, в ней содержащихся, с мажорантой M на D , задаваемой как суперпозиция положительной убывающей неограниченной функции на $(0, +\infty)$ с функцией расстояния до границы ∂D — версии для \mathbb{R}^n см. [31]; в [32]–[38] — различные виды областей $D \subset \mathbb{C}$, вплоть до произвольных, с достаточно общего вида мажорантой M . В подавляющем большинстве известных результатов или их наглядных иллюстрациях мажоранта M задаётся в той или иной степени явно, так что оценка поведения её меры Рисса ν_M , участвующей в посылке импликации (1.6), или даже явное её вычисление как $\nu_M := \frac{1}{2\pi}\Delta M$ в смысле теории распределений Л. Шварца, или теории обобщенных функций, через действие оператора Лапласа Δ бывают возможны (см. подраздел 6.1). Мы глубоко признательны [А. Ф. Гришину], С. Ю. Фаворову, Ю. Риихентаусу за полезные обсуждения и/или информацию и в особенности Ф. Г. Авхадиеву за ценные консультации по геометрической теории функций комплексного переменного (см. пункты 5.1.4, 5.1.5, 6.2.2, 6.2.3 ниже).

1.2. Структура. Основная Теорема нашей работы из § 2, подраздел 2.2, проиллюстрирована её частными случаями в подразделе 1.4 Введения — Теорема 1 и её Следствие 1.1. Их точность, как и Основной Теоремы на уровне примеров не обсуждается, поскольку установлено гораздо большее: Теорема 1 и Основная Теорема для любой области D с неполярной границей допускают обращение для непрерывной δ -субгармонической мажоранты M как в субгармоническом, так и в голоморфном обрамлении — Теорема 2 и Следствие

3.1 из § 3. В подразделе 3.2 рассмотрены обращения для произвольных собственных областей $D \subset \mathbb{C}_\infty$, основанные только на тестовых функциях Грина (Теорема 3 и Следствие 3.2), а также только на тестовых аналитических или полиномиальных дисках (Теорема 4 и Следствие 3.3). В § 4 детально разобран случай радиальной субгармонической — см. подраздел 4.1 — мажоранты M на плоскости — 4.2, в круге и его внешности — 4.3, а также в кольце — 4.4. В § 5 разработана техника построения разнообразных классов тестовых функций с использованием функций Грина, гиперболического и конформного радиуса области D , проработаны их взаимосвязи с функциями расстояний до подмножеств границы ∂D . Эти построенные классы тестовых функций позволяют в § 6 дать серию различных версий Теоремы 1 с более или менее явными тестовыми функциями и мерами Рисса мажорант-суперпозиций M , вычисленными в подразделе 6.1. О перспективах развития данного исследования несколько слов сказано в заключительном п. 6.2.4 статьи.

1.3. Основные обозначения, определения и соглашения.

1.3.1. Множества. Как обычно, \mathbb{N} — множество *натуральных чисел*, а \mathbb{R} и \mathbb{C} — множества соответственно всех *вещественных* и *комплексных чисел*. Через $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ обозначаем *сферу Римана*, или расширенную комплексную плоскость, для которой здесь мы предпочитаем избегать использования естественного сферического расстояния и для $z \in \mathbb{C}_\infty$ через $|z|$ обозначаем обычный модуль числа $z \in \mathbb{C}$, а $|\infty| := +\infty$. Для подмножества $S \subset \mathbb{C}_\infty$ через $\text{clos } S := \overline{S}$, ∂S и $\mathbb{C}S := \mathbb{C}_\infty \setminus S$ обозначаем соответственно *замыкание* в \mathbb{C}_∞ , *границу* S в \mathbb{C}_∞ и *дополнение* S до \mathbb{C}_∞ . Подмножество $S_0 \subset S \subset \mathbb{C}_\infty$ — *собственное подмножество* в S , если $S_0 \neq S$. Для $S_0 \subset S \subset \mathbb{C}_\infty$ пишем $S_0 \Subset S$, если S_0 — *относительно компактное подмножество* в S в топологии, индуцированной с \mathbb{C}_∞ на S . Для $r \in (0, +\infty]$ и $z \in \mathbb{C}$ полагаем $D(z, r) := \{z' \in \mathbb{C} : |z' - z| < r\}$ — *открытый круг* с центром z радиуса r . Таким образом, $D(r) = D(0, r)$ и $D(z, +\infty) := \mathbb{C}$. Для $z = \infty$ нам удобно принять $D(\infty, r) := \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/r\}$ и $D(\infty, +\infty) := \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$. Кроме того, $\overline{D}(z, r) := \text{clos } D(z, r)$ — *замкнутый круг* с центром z радиуса $r > 0$, но $\overline{D}(z, 0) := \{z\}$, $\overline{D}(+\infty) := \mathbb{C}_\infty$. Таким образом, открытые (замкнутые с непустой внутренностью) круги ненулевого радиуса с центром $z \in \mathbb{C}_\infty$ образуют открытую (соответственно замкнутую) базу окрестностей точки $z \in \mathbb{C}_\infty$.

Пустое множество обозначаем символом \emptyset . Одним и тем же символом 0 обозначаем, по контексту, число нуль, нулевой вектор, нулевую функцию, нулевую меру и т. п. Для подмножества X упорядоченного векторного пространства чисел, функций, мер и т. п. с отношением порядка \geq полагаем $X^+ := \{x \in X : x \geq 0\}$ — все положительные элементы из X ; $x^+ := \max\{0, x\}$. *Положительность* всюду понимается, в соответствии с контекстом, как ≥ 0 . На множествах функций с упорядоченным множеством значений отношение порядка индуцируется с множества значений как *поточечное*.

1.3.2. Функции. Функция $f: X \rightarrow Y$ с упорядоченными (X, \leq) , (Y, \leq) *возрастающая*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 \leq x_2$ следует $f(x_1) \leq f(x_2)$, и *строго возрастающая*, если из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Аналогично

для (строгого) убывания. Функция (строго) возрастающая или убывающая — (строго) монотонная.

Для топологического пространства T , как обычно, $C(T)$ — векторное пространство над \mathbb{R} или \mathbb{C} непрерывных функций со значениями в \mathbb{R} или \mathbb{C} .

Через $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ обозначаем функции евклидова расстояния между парами точек, между точкой и множеством, между множествами в \mathbb{C} . По определению $\text{dist}(\cdot, \emptyset) := \text{dist}(\emptyset, \cdot) := \inf \emptyset := +\infty := \text{dist}(z, \infty) := \text{dist}(\infty, z)$ при $z \in \mathbb{C}$.

Для открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}_\infty$ через $\text{Hol}(\mathcal{O})$ и $\text{har}(\mathcal{O})$ обозначаем векторные пространства соответственно над полем \mathbb{C} голоморфных и над полем \mathbb{R} гармонических в \mathcal{O} функций; $\text{sbh}(\mathcal{O})$ — выпуклый конус над \mathbb{R}^+ субгармонических в \mathcal{O} функций [1]–[3]. Субгармоническую функцию, тождественно равную $-\infty$ на \mathcal{O} , обозначаем символом $-\infty \in \text{sbh}(\mathcal{O})$. Как обычно, функция u голоморфная или (суб)гармоническая в открытой окрестности \mathcal{O} точки $\infty \in \mathbb{C}_\infty$, если при инверсии $\star: z \mapsto z^* := 1/\bar{z}$, $z \in \mathbb{C}_\infty$, функция $u^*: z \mapsto u(z^*)$, $z \in \mathbb{C}_\infty$, такая же, но уже в окрестности $\mathcal{O}^* := \{z^*: z \in \mathcal{O}\}$ точки $0 \in \mathbb{C}_\infty$. Для произвольного подмножества $S \subset \mathbb{C}_\infty$ класс $\text{sbh}(S)$ состоит из сужений на S функций, субгармонических в некотором, вообще говоря, своём открытом множестве $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}_\infty$, включающем в себя S ; $\text{sbh}^+(S) := (\text{sbh}(S))^+$. Для $u \in \text{sbh}(S)$ полагаем $(-\infty)_u(S) := \{z \in S: u(z) = -\infty\}$ — это $(-\infty)$ -множество функции u в S [1; 3.5], где зачастую пишем просто $(-\infty)_u$, не указывая множество S .

Для функции или меры a её сужение на множество X обозначаем как $a|_X$.

1.3.3. Меры. Далее $\mathcal{M}(S)$ — класс борелевских вещественных мер, или рядов, на $S \subset \mathbb{C}_\infty$; $\mathcal{M}_c(S)$ — подкласс мер в $\mathcal{M}(S)$ с компактным носителем $\text{supp } \nu \subset S$, $\mathcal{M}^+(S) := (\mathcal{M}(S))^+$. Мера $\mu \in \mathcal{M}(S)$ сосредоточена на измеримом по мере μ подмножестве $S_0 \subset S$, если $\mu(S') = \mu(S' \cap S_0)$ для любого измеримого по мере μ подмножества $S' \subset S$. Для $\nu \in \mathcal{M}(S)$ полагаем $\nu(z, r) := \nu(D(z, r))$, если, конечно, $D(z, r) \subset S$.

Меру Рисса функции $u \in \text{sbh}(\mathcal{O})$ чаще всего будем обозначать как $\nu_u := \frac{1}{2\pi} \Delta u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{O})$ или μ_u . Так, для $u \neq -\infty$ её мера Рисса ν_u — борелевская положительная мера [1]–[3]. Для функции же $-\infty \in \text{sbh}(\mathcal{O})$ её мера Рисса по определению равна $+\infty$ на любом подмножестве из \mathcal{O} .

1.3.4. Нули голоморфных функций. Пусть $0 \neq f \in \text{Hol}(\mathcal{O})$. Функция f обращается в нуль на последовательности точек $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots}$, лежащих в \mathcal{O} (пишем $Z \subset \mathcal{O}$), если кратность нуля, или корня, функции f в каждой точке $z \in \mathcal{O}$ не меньше числа повторений этой точки в последовательности Z (пишем $f(Z) = 0$). Каждой последовательности $Z \subset \mathcal{O}$ без точек сгущения в Ω сопоставляем её считающую меру

$$n_Z(S) := \sum_{z_k \in S} 1 \quad \text{для произвольных } S \subset D \quad (1.7)$$

— число точек из Z , попавших в S . Последовательность нулей (корней) функции $f \in \text{Hol}(D) \setminus \{0\}$, каким-либо образом перенумерованную с учетом кратности, обозначаем через Zero_f . Так как $\log |f| \in \text{sbh}(\mathcal{O})$, взаимосвязь меры Рисса $\nu_{\log |f|}$ со считающей мерой её нулей (1.7) задаётся равенством [1; Theorem 3.7.8]

$$\nu_{\log |f|} = \frac{1}{2\pi} \Delta \log |f| \stackrel{(1.7)}{=} n_{\text{Zero}_f}. \quad (1.8)$$

В частности, из $f(Z) = 0$ следует $n_Z \leq n_{\text{zero}_f}$ на \mathcal{O} , и наоборот.

1.3.5. Некоторые соглашения. Число C и постоянную функцию, тождественно равную C не различаем. Через $\text{const}_{a_1, a_2, \dots}$ обозначаем вещественные постоянные, вообще говоря, зависящие от a_1, a_2, \dots и, если не оговорено противное, только от них; $\text{const}_{a_1, a_2, \dots}^+ \geq 0$.

Ссылка над знаками (не)равенства, включения, или, более общо, бинарного отношения, означает, что при переходе к правой части этого отношения изменялись, в частности, и отмеченная формула или утверждение.

(Под)область в \mathbb{C}_∞ — открытое связное подмножество в \mathbb{C}_∞ . Далее всюду

$$\boxed{\emptyset \neq D_0 \Subset D \neq \mathbb{C}_\infty, \text{ где } D_0, D \text{ — подобласти в } \mathbb{C}_\infty.} \quad (\text{D})$$

Основной объект — область D , а роль подобласти $D_0 \Subset D$ аналогична роли фиксированной точки области (множества) или начала отсчёта, или координат, в пространстве. Она, — во всяком случае, в начале формулировок основных утверждений, — может выбираться произвольно. Как правило, чем большей она выбрана, тем, формально, соответствующее утверждение — более общее.

1.3.6. Тестовые субгармонические функции. Аналог основных (финитных) функций теории распределений Л.Шварца, или обобщённых функций, в нашей работе предоставляет

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функцию $v \in \text{sbh}^+(D \setminus D_0)$ называем *тестовой* (для области D вне подобласти D_0), если

$$\lim_{D \ni z' \rightarrow z} v(z') = 0 \quad \text{для любой точки } z \in \partial D. \quad (1.9)$$

Класс всех тестовых функций обозначаем через $\text{sbh}_0^+(D \setminus D_0)$. Для каждого числа $b \geq 0$ определим его *подкласс*

$$\text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b) := \left\{ v \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0) : \sup_{z \in \partial D_0} v(z) \leq b \right\}, \quad (1.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Из принципа максимума для субгармонических функций

$$\text{sbh}_0^+(D \setminus D_0) = \bigcup_{b \geq 0} \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b), \quad (1.11)$$

и в определении (1.10), учитывая (1.9), можно заменить $\sup_{z \in \partial D_0}$ на $\sup_{z \in D \setminus D_0}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Во всех утверждениях настоящей работы, где используются классы (1.11) и $\text{sbh}_0^+(D \setminus D_0)$, можно использовать, вообще говоря, и более широкие классы тестовых функций соответственно $\text{sbh}_0^+(D \setminus \text{clos } D_0; \leq b)$

$$:= \left\{ v \in \text{sbh}^+(D \setminus \text{clos } D_0) : \lim_{D \ni z' \rightarrow z} v(z') \stackrel{(1.9)}{=} 0, \quad \limsup_{\text{clos } D_0 \ni z \rightarrow \partial D_0} v(z) \leq b \right\}, \quad (1.12b)$$

$$\text{sbh}_0^+(D \setminus \text{clos } D_0) := \bigcup_{b \geq 0} \text{sbh}_0^+(D \setminus \text{clos } D_0; \leq b) \quad (1.12\infty)$$

с соответствующими заменами интегралов по множеству $D \setminus D_0$ и сумм по точкам в таких множествах соответственно интегралами и суммами по множеству $D \setminus \text{clos } D_0$. Формально это несколько обобщает наши результаты, но по существу незначительно, поскольку небольшие «раздутья» подобласти D_0 с сохранением рамочного условия (D) практически не ослабляют результаты, но уже переводят классы (1.12) в классы из Определения 1. В то же время использование классов (1.12) требует, во всяком случае в наших доказательствах, большей детализации и затеняет основную их линию.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Часто также будет использоваться «минимальный» класс тестовых функций

$$\text{sbh}_0^+(D \setminus \{z_0\}) := \left\{ v \in \text{sbh}^+(D \setminus \{z_0\}) : \lim_{D \ni z' \rightarrow z} v(z') \stackrel{(1.9)}{=} 0 \right\}, \quad (1.13)$$

который формально можно считать пересечением всех классов (1.11), или (1.12 ∞), по всем подобластям $D_0 \ni z_0$ из рамочного соглашения (D) п. 1.3.5 Введения.

1.4. Частные случаи Основной Теоремы. Одно из следствий нашей Основной Теоремы из § 2, содержащего как подготовительные, так и основные результаты с полными доказательствами, может быть сформулировано как

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть $M \in \text{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$ с мерой Рисса ν_M , $u \in \text{sbh}(D)$ с мерой Рисса ν_u , а также $u \leq M$ на $D \setminus D_0$. Тогда для любой тестовой функции $v \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0)$ верна импликация

$$\left(\int_{D \setminus D_0} v d\nu_M < +\infty \right) \Rightarrow \left(\int_{D \setminus D_0} v d\nu_u < +\infty \right). \quad (1.14)$$

Так, если $0 \neq f \in \text{Hol}(D)$ и f обращается в нуль на $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots} \subset D$, а $\log |f| \leq M$ на $D \setminus D_0$, то для любой $v \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0)$ справедлива импликация

$$\left(\int_{D \setminus D_0} v d\nu_M < +\infty \right) \Rightarrow \left(\sum_{z_k \in D \setminus D_0} v(z_k) < +\infty \right). \quad (1.15)$$

ТЕОРЕМА 1. В условиях Следствия 1.1 при $z_0 \in D_0 \setminus (-\infty)_M$ для любого числа $b > 0$ найдутся постоянные

$$C := \text{const}_{z_0, D, D_0, b}^+, \quad \overline{C}_M := \text{const}_{z_0, D, D_0, M}^+, \quad (1.16)$$

с которыми для любой функции $v \stackrel{(1.10)}{\in} \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b)$ выполнено неравенство

$$\int_{D \setminus D_0} v d\nu_u \leq \int_{D \setminus D_0} v d\nu_M + C \overline{C}_M - C u(z_0). \quad (1.17)$$

В частности, если $f \in \text{Hol}(D)$ — ненулевая функция, обращающаяся в нуль на последовательности $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots} \subset D$, а $\log |f| \leq M$ на $D \setminus D_0$, то для любой тестовой функции $v \stackrel{(1.10)}{\in} \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b)$ справедливо неравенство

$$\sum_{z_k \in D \setminus D_0} v(z_k) \leq \int_{D \setminus D_0} v d\nu_M + C \overline{C}_M - C \log |f(z_0)|. \quad (1.18)$$

При этом постоянная \overline{C}_M из (1.16) положительно однородна по M , т. е. $\overline{C}_{aM} = a\overline{C}_M$ для любого $a \in \mathbb{R}^+$, и полуаддитивна сверху, т. е. $\overline{C}_{M_1+M_2} \leq \overline{C}_{M_1} + \overline{C}_{M_2}$ при любых $M_1, M_2 \in \text{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Если в Следствии 1.1 или в Теореме 1 известно, что $\nu_M \leq \nu^0 \in \mathcal{M}^+(D)$ и $\mathcal{M}^+(D) \ni \nu_0 \leq \nu_u$ на D , то в заключениях (1.14) и (1.17) можно заменить ν_u на ν_0 и ν_M на ν^0 , поскольку тестовые функции положительны. При этом, конечно, постоянные из (1.16) становятся зависимыми от разности мер $\nu^0 - \nu_M$, а $u(z_0)$ в правой части (1.17) надо заменить на некоторое другое число, но в дополнительном изначальном предположении, что $u(z_0) \neq -\infty$.

§ 2. Основные результаты

2.1. δ -субгармонические функции [9]–[10]. Используем наиболее подходящую для рассматриваемой здесь проблематики трактовку разности субгармонических функций, близкую к [10; 2]. Стандартные алгебраические действия над элементами расширенной числовой прямой $[-\infty, +\infty] := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ естественным образом, как и порядковая структура, переносятся с \mathbb{R} . Наряду с функцией $-\infty$ используем и функцию $+\infty$, тождественно равную $+\infty$. Функцию $M: D \rightarrow [-\infty, +\infty]$ в области $D \subset \mathbb{C}_\infty$ называем *тривиальной δ -субгармонической*, если $M = -\infty$ или $M = +\infty$ на D , и *нетривиальной δ -субгармонической функцией* с (вещественной борелевской) мерой Рисса $\nu_M \in \mathcal{M}(D)$, или *зарядом Рисса* ν_M , если выполнены следующие три условия-соглашения.

1. Существуют две функции $u_1, u_2 \in \text{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$ с мерами Рисса соответственно $\nu_{u_1}, \nu_{u_2} \in \mathcal{M}^+(D)$, для которых $M(z) := u_1(z) - u_2(z) \in \mathbb{R}$ для всех $z \notin (-\infty)_{u_1} \cup (-\infty)_{u_2}$. При этом для заряда (меры) Рисса $\nu_M := \nu_{u_1} - \nu_{u_2} \in \mathcal{M}(D)$ однозначно определено разложение Хана–Жордана $\nu_M := \nu_M^+ - \nu_M^-$ на разность взаимно сингулярных положительной и отрицательной вариаций $\nu_M^+, \nu_M^- \in \mathcal{M}^+(D)$, $|\nu_M| := \nu_M^+ + \nu_M^-$ — полная вариация меры ν_M . Для полунепрерывной сверху локально ограниченной сверху функции $v: D \rightarrow \mathbb{R}^+$ полагаем

$$\int_D v d\nu_M := \int_D v d\nu_M^+ - \int_D v d\nu_M^- \quad (2.1)$$

при условии конечности хотя бы одного из интегралов справа.

2. Определяющее множество $\text{dom } M \subset D$ — это множество точек $z \in D$, для каждой из которых при некотором $r_z > 0$ конечен интеграл

$$\left(\int_0^{r_z} \frac{|\nu_M|(z, t)}{t} dt < +\infty \right) \Leftrightarrow \left(\int_{D(z, r_z)} \log |z' - z| d|\nu_M|(z') > -\infty \right). \quad (2.2)$$

При этом доопределяем функцию M на всех $z \in \text{dom } M$ по правилу

$$M(z) = \lim_{0 < r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(z + re^{i\theta}) d\theta \in \mathbb{R} \quad \text{для всех } z \in \text{dom } M,$$

что всегда согласуется с предварительно заданными значениями M в предыдущем п. 1 на $\mathbb{C}_\infty \setminus ((-\infty)_{u_1} \cup (-\infty)_{u_2}) \subset \text{dom } M$. В частности,

известно [1]–[3], что в случае субгармонической в D функции $u \neq -\infty$ её определяющее множество $\text{dom } u = D \setminus (-\infty)_u$.

3. $M(z) = +\infty$ при² $z \in D \setminus \text{dom } M$.

Пункт 1, следуя [9; Theorem 11], можно заменить, избегая явного упоминания субгармонических функций, на

1'. M — локально интегрируемая по мере Лебега на D функция, обладающая в смысле теории распределений свойством: для любой подобласти $D' \Subset D$ найдется постоянная $C' \in \mathbb{R}^+$, с которой для любой финитной дважды непрерывно дифференцируемой функции $f: D' \rightarrow \mathbb{R}$ с носителем $\text{supp } f \subset D'$ имеет место неравенство

$$\left| \int_{D'} M \Delta f \, d\lambda \right| \leq C' \max_{z \in D'} |f(z)|, \quad \lambda — \text{мера Лебега на } D.$$

При этом $\nu_M := \frac{1}{2\pi} \Delta M$ в смысле теории распределений.

При таком подходе п. 2 заменяем соответственно на

2'. Для определяющего множества $\text{dom } M \subset D$, определяемого, как и выше, условием конечности интегралов вида (2.2), полагаем

$$M(z) = \lim_{0 < r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(z,r)} M \, d\lambda \quad \text{для всех } z \in \text{dom } M,$$

где $D \setminus \text{dom } M$ — нулевой ёмкости. В частности, $\lambda(D \setminus \text{dom } M) = 0$.

Пункт 3 сохраняем или считаем функцию M неопределённой в $D \setminus \text{dom } M$.

Класс δ -субгармонических в D функций обозначаем через $\delta\text{-sbh}(D)$.

2.2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть $\pm\infty \neq M \in \delta\text{-sbh}(D)$ с зарядом Рисса $\nu_M := \frac{1}{2\pi} \Delta M$ и определяющим множеством $\text{dom } M \subset D$ (см. 2.1; 2, (2.2)). Тогда для любых

- (i) точки $z_0 \in D_0 \cap \text{dom } M$ и числа $b > 0$,
- (ii) регулярной³ области $\tilde{D} \subset \mathbb{C}_\infty$ с функцией Грина $g_{\tilde{D}}(z, z_0)$ с полюсом в точке z_0 при $D_0 \Subset \tilde{D} \subset D$ и $\mathbb{C}_\infty \setminus \text{clos } \tilde{D} \neq \emptyset$

найдётся число

$$C := \text{const}_{z_0, D_0, \tilde{D}, b}^+ := \frac{b}{\inf_{z \in \partial D_0} g_{\tilde{D}}(z, z_0)} > 0, \quad (2.3)$$

с которыми для любой функции $u \in \text{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$, удовлетворяющей неравенству $u \leq M$ на $D \setminus D_0$, а также

- (iii) для любой функции $v \stackrel{(1.10)}{\in} \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b)$

²В [10; 2] положено $M(z) = 0$ для $z \notin \text{dom } M$, но для наших целей предпочтительнее $= +\infty$, поскольку функция M у нас играет роль мажоранты.

³Простые и наглядные достаточные условия регулярности области геометрического характера см., например, в [3; Теорема 2.11], а другие — в [1; 4.2].

выполнено неравенство

$$Cu(z_0) + \int_{D \setminus D_0} v \, d\nu_u \leq \int_{D \setminus D_0} v \, d\nu_M + \int_{\tilde{D} \setminus D_0} v \, d\nu_M^- + C \overline{C}_M, \quad (2.4v)$$

$$\text{где } \overline{C}_M := \int_{\tilde{D}} g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0) \, d\nu_M + \int_{\tilde{D} \setminus D_0} g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0) \, d\nu_M^- + M(z_0). \quad (2.4C)$$

Для величины \overline{C}_M из (2.4C) возможно значение $+\infty$, но при $\tilde{D} \Subset D$ — это некоторая постоянная $\overline{C}_M := \text{const}_{z_0, D_0, \tilde{D}, M}^+ < +\infty$, положительно однородная и полуаддитивная сверху по M .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Основная Теорема верна и для тестовых функций из Замечания 1.2, т. е. с функциями $v \stackrel{(1.12\infty)}{\in} \text{sbh}_0^+(D \setminus \text{clos } D_0)$ в п. (iii).

2.3. Меры и потенциалы Йенсена.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [19], [39]–[45]. Мету $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C}_\infty)$ называем *мерой Йенсена* внутри области D в точке $z_0 \in D$, если $\mu \in \mathcal{M}_c^+(D)$, , т. е. $\text{supp } \mu \subset D$, и

$$u(z_0) \leq \int u \, d\mu \quad \text{для всех } u \in \text{sbh}(D). \quad (2.5)$$

Класс всех таких мер Йенсена обозначаем через $J_{z_0}(D)$.

Очевидно, по Определению 2 каждая мера $\mu \in J_{z_0}(D)$ вероятностная, т. е. $\mu(D) = 1$. Далее неоднократно используется то, что для любого множества нулевой ёмкости $E \subset D$, в частности, при $E = (-\infty)_u$, $-\infty \neq u \in \text{sbh}(D)$, для меры $\mu \in J_{z_0}(D)$ имеем $\mu(E \setminus \{z_0\}) = 0$ [42; Corollary 1.8].

ПРИМЕР 2.1. Пусть \tilde{D} — область в D с неполярной границей, $\mathbb{C}_\infty \setminus \text{clos } \tilde{D} \neq \emptyset$. Гармоническая мера $\omega_{\tilde{D}}(z_0, \cdot)$ для (или относительно) \tilde{D} в точке $z_0 \in \tilde{D}$ (см. [1; 4.3], [3; 3.6], [3; 5.7.4]) при условии $\tilde{D} \Subset D$ — пример меры Йенсена из $J_{z_0}(D)$. Вырожденный случай — мера Дирака δ_{z_0} в точке $\{z_0\}$, т. е. единичная масса, сосредоточенная в точке z_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 ([19], [32], [44]–[46], ср. с [39; 3.1, 3.3]; ранние частные случаи — в [47]–[48]). Функцию V из класса $\text{sbh}^+(\mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\})$ называем *потенциалом Йенсена* внутри области D с полюсом в точке $z_0 \in D$, если выполнены два условия:

- 1) найдётся область $D_V \Subset D$, содержащая точку $z_0 \in D_V$, для которой $V(z) \equiv 0$ при всех $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus D_V$, т. е. $V|_{\mathbb{C}_\infty \setminus D_V} = 0$ (финитность в D);
- 2) задана логарифмическая полунормировка в точке z_0 , а именно:

$$\limsup_{z_0 \neq z \rightarrow z_0} \frac{V(z)}{l_{z_0}(z)} \leq 1, \quad (2.6o)$$

$$\text{где } l_{z_0}(z) := \begin{cases} \log \frac{1}{|z - z_0|} & \text{при } z_0 \neq \infty, \\ \log |z| & \text{при } z_0 = \infty. \end{cases} \quad (2.6l)$$

Условия (2.6) можно записать в эвивалентной форме

$$\begin{aligned} \sup_{z \neq z_0} \left(V(z) - \log^+ \frac{1}{|z - z_0|} \right) &< +\infty \quad \text{при } z_0 \in \mathbb{C}, \\ \sup_{z \neq \infty} (V(z) - \log^+ |z|) &< +\infty \quad \text{при } z_0 = \infty. \end{aligned}$$

Класс всех таких потенциалов Йенсена обозначаем через $PJ_{z_0}(D)$.

Имеет место очевидное (см. Определение 1)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Каждый потенциал Йенсена из $PJ_{z_0}(D)$ при $z_0 \in D_0$ — тестовая функция для D вне D_0 , т. е. $PJ_{z_0}(D) \subset \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0)$ для $z_0 \in D_0$.*

ПРИМЕР 2.2. Пусть \tilde{D} — область в \mathbb{C}_∞ с неполярной границей, $\mathbb{C}_\infty \setminus \text{clos } \tilde{D} \neq \emptyset$. Функция Грина $g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0)$ для (или относительно) \tilde{D} с полюсом в точке $z_0 \in \tilde{D}$, продолженная на \mathbb{C}_∞ по правилу (см. [1; 4.4], [3; 3.7, 5.7])

$$g_{\tilde{D}}(z, z_0) := \begin{cases} 0 & \text{при } z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \text{clos } \tilde{D}, \\ \limsup_{\tilde{D} \ni z' \rightarrow z} g_{\tilde{D}}(z', z_0) & \text{при } z \in \partial \tilde{D}. \end{cases} \quad (2.8)$$

— пример потенциала Йенсена из $PJ_{z_0}(D)$ при условии $\tilde{D} \Subset D$. Вырожденный вариант — функция, тождественно равная нулю на $\mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\}$.

Логарифмический потенциал рода 0 вероятностной меры $\mu \in \mathcal{M}_c^+(\mathbb{C}_\infty)$ с полюсом в точке $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ определяем для всех $w \in \mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\}$ как функцию

$$V_\mu(w) := \int_D \log \left| \frac{w - z}{w - z_0} \right| d\mu(z) = \int_D \log \left| 1 - \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| d\mu(z) \quad \text{при } z_0 \neq \infty, \quad (2.9_0)$$

где при $w = \infty$ подынтегральные выражения доопределены значением 0,

$$V_\mu(w) := \int_D \log \left| \frac{w - z}{z} \right| d\mu(z) = \int_D \log \left| 1 - \frac{w}{z} \right| d\mu(z) \quad \text{при } z_0 = \infty, \quad (2.9_\infty)$$

где при $z = \infty$ подынтегральные выражения доопределены значением 0.

Отметим основные взаимосвязи между мерами и потенциалами Йенсена. Первое — следующее утверждение о двойственности:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 [45; Предложение 1.4, Теорема двойственности]. *Отображение \mathcal{P} , определяемое по правилу*

$$\mathcal{P}: J_{z_0}(D) \rightarrow PJ_{z_0}(D), \quad \mathcal{P}(\mu) \stackrel{(2.9)}{:=} V_\mu, \quad \mu \in J_{z_0}(D) \quad (2.10)$$

— аффинная⁴ биекция, а

$$\mathcal{P}^{-1}(V) \stackrel{(2.61)}{=} \frac{1}{2\pi} \Delta V \Big|_{D \setminus \{z_0\}} + \left(1 - \limsup_{z_0 \neq z \rightarrow z_0} \frac{V(z)}{l_{z_0}(z)} \right) \cdot \delta_{z_0}, \quad V \in PJ_{z_0}(D). \quad (2.11)$$

В частности, для регулярной области $\tilde{D} \Subset D$ при $z_0 \in \tilde{D}$ — классическое

$$\mathcal{P}(\omega_{\tilde{D}}(z_0, \cdot)) = g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0), \quad z_0 \in \tilde{D} \Subset D.$$

⁴Здесь это означает, что $\mathcal{P}(t\mu_1 + (1-t)\mu_2) = t\mathcal{P}(\mu_1) + (1-t)\mathcal{P}(\mu_2)$ для всех $t \in [0, 1]$.

Второе — это обобщённая формула Пуассона–Йенсена:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3 [45; Предложение 1.2]. Пусть $\mu \in J_{z_0}(D)$. Тогда для любой функции $u \in \text{sbh}(D)$ с мерой Рисса ν_u при $u(z_0) \neq -\infty$ имеем равенство

$$u(z_0) + \int_{D \setminus \{z_0\}} V_\mu d\nu_u = \int_D u d\mu. \quad (2.12)$$

В частности, для регулярной области $\tilde{D} \Subset D$ — это классическая формула

$$u(z_0) + \int_{\tilde{D} \setminus \{z_0\}} g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0) d\nu_u = \int_{\tilde{D}} u d\omega_{\tilde{D}}(z_0, \cdot). \quad (2.13)$$

2.4. Тестовые функции и потенциалы Йенсена. Отдельные элементы предлагаемых ниже конструкций в очень частных случаях уже успешно использовались нами ранее, например, в [19], [20], [46] по различным поводам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Для каждой тестовой функции $v \stackrel{(1.11)}{\in} \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0)$ её, обозначаемое тем же символом v , продолжение

$$v(z) := \begin{cases} v(z) & \text{для } z \in D \setminus D_0, \\ 0 & \text{для } z \in \mathbb{C}_\infty \setminus D \end{cases} \quad (2.14)$$

— субгармоническая функция в $\mathbb{C}_\infty \setminus D_0$, равномерно стремящаяся к нулю при приближении к $\mathbb{C}_\infty \setminus D$ в том смысле, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся подобласть $D_\varepsilon \Subset D$, для которой $D_0 \subset D_\varepsilon$ и

$$0 \leq v(z) < \varepsilon \quad \text{во всех точках } z \in \mathbb{C}_\infty \setminus D_\varepsilon \quad (2.15)$$

(ср. с более жёсткой финитностью из п. 1 Определения 3). Свойство, выражаемое равномерными соотношениями (2.15) будем записывать далее в виде

$$\lim_{D \ni z \rightarrow \partial D} v(z) = 0. \quad (2.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой точки $z \in \partial D$ по Определению 1 тестовых функций $\lim_{D \ni z' \rightarrow z} v(z') \stackrel{(1.9)}{=} 0$ и для продолженной функции (2.14) при любом $\varepsilon > 0$ найдётся число $r_\varepsilon(z)$, для которого $0 \leq v(z') < \varepsilon$ для всех $z' \in D(z, r_\varepsilon(z))$. В силу компактности ∂D в \mathbb{C}_∞ можно выбрать конечное число кругов $D(z_j, r_\varepsilon(z_j))$, $j = 1, 2, \dots, n < +\infty$, с которыми при

$$D_\varepsilon := D \setminus \bigcup_{j=1}^n D(z_j, r_\varepsilon(z_j))$$

выполнено (2.15). В частности, функция (2.14) непрерывная на $\mathbb{C}_\infty \setminus D$, а значит полунепрерывная сверху на некотором открытом множестве, включающем в себя $\mathbb{C}_\infty \setminus D_0$. Интегрируемость по кругам с центром в точках $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus D$ и мажорирование средними по ним нулевых значений функции (2.14) на $\mathbb{C}_\infty \setminus D$ очевидны ввиду положительности этой функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Предложение 2.4 и его доказательство переносятся и на тестовые функции $v \stackrel{(1.12\infty)}{\in} \text{sbh}_0^+(D \setminus \text{clos } D_0)$ из Замечания 1.2 с той лишь разницей, что в первой строчке правой части (2.14) надо заменить D_0 на $\text{clos } D_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Тестовую функцию $v \stackrel{(1.11)}{\in} \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0)$, продолженную на \mathbb{C}_∞ по правилу (2.14), называем *продолженной на $\mathbb{C}_\infty \setminus D_0$ тестовой функцией*, обозначая, как правило, это продолжение той же буквой, или тем же символом, что и исходную тестовую функцию (ср. с (2.8) из Примера 2.2).

Кроме того, если при этом $\mu_v \in \mathcal{M}^+(D \setminus D_0)$ — мера Рисса исходной тестовой функции $v \stackrel{(1.11)}{\in} \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0)$, то меру Рисса продолженной тестовой функции, сосредоточенную, вообще говоря, уже на $\text{clos } D \setminus D_0 \subset \mathbb{C}_\infty \setminus D_0$, т. е. из класса $\mathcal{M}^+(\text{clos } D \setminus D_0)$, также называем *продолженной мерой Рисса* продолженной тестовой функции V и тоже обозначаем её как μ_v .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$, $p \in \mathbb{R}^+$ и функция $V \in \text{sbh}(\mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\})$ с мерой Рисса μ_V на $\mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\}$ удовлетворяет условию

$$\limsup_{z_0 \neq z \rightarrow z_0} \frac{V(z)}{l_{z_0}(z)} \stackrel{(2.6)}{=} p, \quad \text{где } l_{z_0}(z) \stackrel{(2.61)}{:=} \begin{cases} \log \frac{1}{|z-z_0|} & \text{при } z_0 \neq \infty, \\ \log |z| & \text{при } z_0 = \infty. \end{cases}$$

Тогда $\mu_V(\mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\}) = p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $z_0 \neq \infty$ с помощью инверсии \star , как во Введении в разделе 1.3, но, если необходимо, со сдвигом

$$\star_{z_0}: z \mapsto \frac{1}{z-z_0}, \quad z \in \mathbb{C}_\infty, \quad \star_{z_0}(z_0) = \infty, \quad (2.17)$$

сохраняющими, как известно, при соответствующей замене переменных субгармоничность и полную меру, можно всегда перейти к случаю $z_0 = \infty$. Остаётся воспользоваться представлением Адамара для V [3; Теорема 4.2], а затем и [4; Theorem 6.32], как в [45; Доказательство Предложения 1.4, (1.13)–(1.14)].

2.4.1. Продолжение тестовых функций в $D \setminus \{z_0\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Для любых

- (i) точки $z_0 \in D_0$ и числа $b \in \mathbb{R}^+$,
- (ii) регулярной области $\tilde{D} \subset \mathbb{C}_\infty$ с $D_0 \Subset \tilde{D} \subset D$ и $\mathbb{C}_\infty \setminus \text{clos } \tilde{D} \neq \emptyset$,

найдётся число

$$\tilde{c} := \text{const}_{z_0, D_0, \tilde{D}, b}^+ = \frac{1}{b} \inf_{z \in \partial D_0} g_{\tilde{D}}(z, z_0) > 0, \quad (2.18)$$

для которого по любой функции $v \stackrel{(1.10)}{\in} \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b)$ с мерой Рисса μ_v при помощи продолженной функции Грина $g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0)$ можно построить функцию

$$\tilde{V} := \begin{cases} g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0) & \text{на } \text{clos } D_0 \setminus \{z_0\}, \\ \max\{g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0), \tilde{c} \cdot v\} & \text{на } \tilde{D} \setminus \text{clos } D_0, \\ \tilde{c} \cdot v & \text{на } D \setminus \tilde{D}, \\ 0 & \text{на } \mathbb{C}_\infty \setminus D, \end{cases} \quad (2.19)$$

обладающую следующими свойствами:

$$\tilde{V} \in \text{sbh}^+(\mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\}) \text{ с мерой Рисса } \mu_{\tilde{V}} \in \mathcal{M}^+(\text{clos } D), \quad (2.20\text{v})$$

$$\tilde{V} \big|_{D_0 \setminus \{z_0\}} \in \text{har}(D_0 \setminus \{z_0\}), \quad (2.20\text{h})$$

$$\lim_{D \ni z \rightarrow \partial D} \tilde{V}(z) \stackrel{(2.16)}{=} 0, \quad (2.20\text{o})$$

$$\lim_{z_0 \neq z \rightarrow z_0} \frac{\tilde{V}(z)}{l_{z_0}(z)} = 1 \quad \text{— нормировка в точке } z_0, \quad (2.20\text{n})$$

$$d\text{e } l_{z_0}(z) \stackrel{(2.61)}{:=} \begin{cases} \log \frac{1}{|z-z_0|} & \text{при } z_0 \neq \infty, \\ \log |z| & \text{при } z_0 = \infty, \end{cases} \quad (2.20\text{l})$$

$$D_0 \cap \text{supp } \mu_{\tilde{V}} = \emptyset, \quad \mu_{\tilde{V}} \big|_{D \setminus \text{clos } \tilde{D}} = \tilde{c}\mu_v \big|_{D \setminus \text{clos } \tilde{D}}, \quad \mu_{\tilde{V}}(\text{clos } D) = 1. \quad (2.20\text{m})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $v \stackrel{(1.10)}{\in} \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b)$ ввиду положительности и выполнения свойства (2.16), т. е. $\lim_{z \rightarrow \partial D} v(z) = 0$, по Предложению 2.4 может быть распространена на открытое в \mathbb{C}_∞ дополнение $\mathbb{C}_\infty \setminus \text{clos } D_0$ значениями 0 на $\mathbb{C}_\infty \setminus D$ как субгармоническая. Таким образом, можем считать функцию v определённой и субгармонической всюду на открытом множестве $\mathbb{C}_\infty \setminus \text{clos } D_0$. Кроме того, в силу её полунепрерывности сверху в окрестности границы $\partial D_0 \supset \partial(\mathbb{C}_\infty \setminus \text{clos } D_0)$, для неё имеет место ограничение

$$\limsup_{(\mathbb{C}_\infty \setminus \text{clos } D_0) \ni z' \rightarrow z} v(z') \leq \sup_{z \in \partial D_0} v(z) \stackrel{(1.10)}{\leq} b \quad \text{для всех } z \in \partial(\mathbb{C}_\infty \setminus \text{clos } D_0). \quad (2.21)$$

Для области \tilde{D} из условия (ii) рассмотрим продолженную, как в Примере 2.2, функцию Грина $g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0)$. Из свойств функции Грина [1; Theorem 4.4.3]

$$a := \inf_{z \in \partial D_0} g_{\tilde{D}}(z, z_0) > 0. \quad (2.22)$$

Теперь перейдём к функции

$$v_0 \stackrel{(2.22)}{:=} \frac{b}{a} g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0) \in \text{sbh}^+(\mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\}), \quad (2.23\text{v})$$

для которой по известным свойствам функций Грина [1; Theorem 4.4.9]

$$\lim_{D \ni z \rightarrow z_0} \frac{v_0(z)}{l_{z_0}(z)} \stackrel{(2.20\text{l})}{=} \frac{b}{a}, \quad v_0(z) \equiv 0 \quad \text{для всех } z \in D \setminus \tilde{D}. \quad (2.23\text{o})$$

$$v_0 \big|_{\tilde{D} \setminus \{z_0\}} \in \text{har}(\tilde{D}). \quad (2.23\text{h})$$

Кроме того, ввиду (2.22), (2.23v), (2.23o) и (2.21)

$$v_0 \big|_{\partial(\mathbb{C}_\infty \setminus \text{clos } D_0)} \stackrel{(2.23\text{v})}{\geq} b \stackrel{(2.21)}{\geq} v \big|_{\partial(\mathbb{C}_\infty \setminus \text{clos } D_0)}, \quad v_0 \big|_{D \setminus \tilde{D}} = 0 \leq v \big|_{D \setminus \tilde{D}}. \quad (2.24)$$

Будет использована

ТЕОРЕМА О СКЛЕЙКЕ [1; Theorem 2.4.5]. Пусть $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1$ — открытые множества в \mathbb{C} и $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_0$. Пусть $v_0 \in \text{sbh}(\mathcal{O}_0)$, $v \in \text{sbh}(\mathcal{O}_1)$. Если

$$\limsup_{\mathcal{O}_1 \ni z' \rightarrow z} v(z') \leq v_0(z) \quad \text{для всех } z \in \mathcal{O}_0 \cap \partial \mathcal{O}_1, \quad (2.25)$$

то функция

$$\tilde{v} := \begin{cases} \max\{v, v_0\} & \text{на } \mathcal{O}_1, \\ v_0 & \text{на } \mathcal{O}_0 \setminus \mathcal{O}_1, \end{cases} \quad (2.26)$$

субгармоническая на \mathcal{O}_0 .

Применим Теорему о склейке при

$$\mathcal{O}_0 := \mathbb{C} \setminus \{z_0\}, \quad \mathcal{O}_1 := \mathbb{C} \setminus \text{clos } D_0$$

к функциям v_0 из (2.23v) и v , продолженной выше на \mathcal{O}_1 , удовлетворяющим, ввиду (2.24), условию (2.25). По построению (2.26) и ввиду (2.23o) для построенной функции $\tilde{v} \in \text{sbh}^+(\mathbb{C} \setminus \{z_0\})$ её конструкцию можно описать через соответствующие сужения более детально:

$$0 \leq \tilde{v} = \begin{cases} v_0 & \text{на } \text{clos } D_0 \setminus \{z_0\}, \\ \max\{v, v_0\} & \text{на } \tilde{D} \setminus \text{clos } D_0, \\ v & \text{на } D \setminus \tilde{D}, \\ 0 & \text{на } \mathbb{C}_\infty \setminus D, \end{cases} \quad (2.27v)$$

и при этом имеет место нормировка

$$\limsup_{\tilde{D} \ni w \rightarrow z_0} \frac{\tilde{v}(w)}{l_{z_0}(w)} \stackrel{(2.23o)}{=} \frac{b}{a}; \quad \tilde{v}|_{D_0 \setminus \{z_0\}} \stackrel{(2.23h)}{\in} \text{har}(D_0 \setminus \{z_0\}). \quad (2.27o)$$

Таким образом, ввиду (2.27o) для положительной субгармонической функции

$$\tilde{V} \stackrel{(2.27v)}{:=} \frac{a}{b} \tilde{v} \in \text{sbh}^+(\mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\}) \quad (2.28)$$

выполнено условие нормировки (2.20n). Положим

$$\tilde{c} := \frac{a}{b} \stackrel{(2.22)}{=} \frac{1}{b} \inf_{z \in \partial D_0} g_{\tilde{D}}(z, z_0)$$

в (2.18). Тогда из (2.27v), домноженного на \tilde{c} , получим в точности (2.19). Наконец, все перечисленные свойства (2.20V)–(2.20I) — прямые следствия построения (2.27)–(2.28) и известных свойств функции Грина $g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0)$, участвующей в нём, начиная с (2.23v). Первое равенство в (2.20m) следует из (2.20h) (гармоничность), второе — из третьей строчки в (2.19) конструкции функции \tilde{V} . Мера $\mu_{\tilde{V}}$ вероятностная по Предложению 2.5 с $p = 1$ ввиду нормировки (2.20n).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Из перечня свойств (2.20) функции \tilde{V} из (2.19) по Определению 3 легко видеть, что эта функция — потенциал Йенсена из $PJ_{z_0}(D')$ внутри любой подобласти $D' \ni z_0$ в \mathbb{C}_∞ при $D \Subset D'$. Соответственно по

Предложению 2.2 из (2.11) следует, что мера Рисса $\mu_{\tilde{V}} = \frac{1}{2\pi}\tilde{V}$ — мера Йенсена внутри таких же областей $D' \subset \mathbb{C}_\infty$ в точке z_0 . Более того, $\mu_{\tilde{V}}$ — мера Йенсена в точке z_0 внутри любой области, содержащей оболочку множества $\{z_0\} \cup \text{supp } \mu_{\tilde{V}}$, полученную объединением этого множества со всеми относительно компактными компонентами в D' из дополнения $\{z_0\} \cup \text{supp } \mu_{\tilde{V}}$ до D' [45; Предложение 1.1].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Если меру μ_v рассматривать в продолженном смысле как меру Рисса продолженной тестовой функции v вида (2.14) из Определения 4, то по построению \tilde{V} промежуточное равенство в (2.20m) уточняется до исчерпывающего равенства $\mu_{\tilde{V}}|_{\text{clos } D \setminus \text{clos } \tilde{D}} = \tilde{c}\mu_v|_{\text{clos } D \setminus \text{clos } \tilde{D}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Доказательство без изменений проходит и для тестовых функций из Замечания 1.2, т. е. функций $v \stackrel{(1.12b)}{\in} \text{sbh}_0^+(D \setminus \text{clos } D_0; \leq b)$. При этом в (2.21) даже можно пропустить промежуточное выражение $\sup_{z \in \partial D_0} v(z)$ в неравенствах — см. условие (2.25) Теоремы о склейке.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Продолжение тестовой функции v после домножения на \tilde{c} в $D \setminus \{z_0\}$ означает, что каждая тестовая функция v может рассматриваться как тестовая функция из минимального класса $\text{sbh}_0^+(D \setminus \{z_0\})$ (см. (1.13), Замечание 1.3) и продолжается на $\mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\}$ с нулевыми значениями на $\mathbb{C}_\infty \setminus D$.

2.4.2. Продолженная функция — предел потенциалов Йенсена.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть \tilde{V} — функция из (2.19), построенная в п. 2.4.1. Тогда последовательность функций

$$V_n := \left(\tilde{V} - \frac{1}{n}\right)^+ := \max\left\{0, \tilde{V} - \frac{1}{n}\right\} \in \text{sbh}^+(\mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.29)$$

представляет собой последовательность потенциалов Йенсена $V_n \in PJ_{z_0}(D)$, для которой поточечно

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \tilde{V}, \quad V_n \leq V_{n+1} \quad \text{на } D \setminus \{z_0\} \quad \text{при всех } n \in \mathbb{N}, \quad (2.30l)$$

для некоторого числа $r_0 > 0$ с вложением $D(z_0, r_0) \Subset D_0$ имеем

$$V_n|_{D(z_0, r_0)} \in \text{har}(D(z_0, r_0)) \quad \text{при больших } n \in \mathbb{N}, \quad (2.30h)$$

$$\lim_{(D \setminus \{z_0\}) \ni z \rightarrow z_0} \frac{V_n(z)}{l_{z_0}(z)} = 1 \quad \text{— нормировка в } z_0 \text{ при всех } n \in \mathbb{N}. \quad (2.30o)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любом $n \in \mathbb{N}$ для каждой из функций

$$V_n := \left(\tilde{V} - \frac{1}{n}\right)^+ := \max\left\{0, \tilde{V} - \frac{1}{n}\right\} \in \text{sbh}^+(\mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\}), \quad (2.31)$$

её субгармоничность и положительность в $\mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\}$ — следствие из (2.20V), нормировка (2.30o) — из (2.20o), гармоничность (2.30h) — (2.20h), а требуемая в Определении 3 потенциалов Йенсена финитность в D вытекает из построения (2.31) и свойства (2.20n). Таким образом, $V_n \in PJ_{z_0}(D)$ — потенциалы Йенсена внутри D с полюсом $z_0 \in D$. Согласно построению (2.31) последовательность $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ возрастающая и стремится поточечно к \tilde{V} в смысле (2.30l).

2.4.3. Одна гипотеза о последовательности выметаний мер. Остановимся на природе вероятностных мер Йенсена μ_n потенциалов Йенсена V_n с носителем $\text{supp } \mu_n \subset D$ из (2.29) и законе их построения по вероятностной мере Рисса $\mu_{\tilde{V}} \in \mathcal{M}^+(\text{clos } D) \subset \mathcal{M}^+(\mathbb{C}_\infty)$. Удобно считать, что $z_0 = \infty$, поскольку к этому случаю всегда можно перейти с помощью инверсии со сдвигом вида (2.17).

Каждому $n \in \mathbb{N}$ сопоставим открытое, в силу полунепрерывности сверху функции \tilde{V} , множество $\mathcal{O}_n := \{z \in \mathbb{C} : \tilde{V}(z) < 1/n\}$ и рассмотрим его дополнение $K_n := \mathbb{C} \setminus \mathcal{O}_n$ — компакт в \mathbb{C} ввиду условия (2.30о) логарифмической нормировки. Дословно повторив классическую процедуру выметания меры $\mu_{\tilde{V}}$ на компакт K_n , основанную на некоторой аппроксимационной технике, детально описанной в [2; гл. IV, §§ 1,2,4], можно убедиться, что меры Рисса $\mu_n \in J_\infty(D) \subset \mathcal{M}_c^+(D)$ субгармонических функций V_n — это выметания вероятностной меры $\mu_{\tilde{V}} \in \mathcal{M}^+(\text{clos } D) \subset \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ из \mathcal{O}_n на K_n , а при $\mathbb{N} \ni n \rightarrow +\infty$ последовательность вероятностных мер $\mu_n \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$ *-слабо сходится на \mathbb{C} к вероятностной мере $\mu_{\tilde{V}} \in \mathcal{M}^+(\mathbb{C})$, т. е. для любой финитной на \mathbb{C} непрерывной функции $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ существует предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f d\mu_n = \int f d\mu_{\tilde{V}}$.

По обобщенной формуле Пуассона–Йенсена, прописанной ниже в виде (2.35u) и возрастания функций V_n следует, что для любой функции $u \in \text{sbh}(D)$ имеет место цепочка неравенств

$$\dots \leq \int_D u d\mu_n \leq \int_D u d\mu_{n+1} \leq \dots$$

Это означает, что каждая следующая вероятностная мера μ_{n+1} является выметанием предшествующей вероятностной меры μ_n относительно конуса $\text{sbh}(D)$ [32] — в записи

$$\dots \prec \mu_n \prec \mu_{n+1} \prec \dots \quad (2.32)$$

ГИПОТЕЗА 1. Пусть задана последовательность выметаний (2.32) относительно $\text{sbh}(D)$ вероятностных мер Йенсена $\mu_n \in J_{z_0}(D)$, *-слабо сходящаяся на \mathbb{C}_∞ к вероятностной мере $\mu \in J_{z_0}(\mathbb{C}_\infty)$, сосредоточенной внутри области D , т. е. $\mu(\mathbb{C}_\infty \setminus D) = 0$. Тогда для любой интегрируемой по мере μ функции $u \in \text{sbh}(D)$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_D u d\mu_n = \int_D u d\mu \quad \text{или} \quad \leq \int_D u d\mu.$$

Для некоторых специальных областей и/или функций u удается подтвердить эту гипотезу, но это ещё весьма далеко от общей ситуации. Например, Гипотеза 1 со знаком равенства верна, если функцию u можно представить в виде поточно возрастающей к u в D последовательности функций $u_k \in \text{sbh}(D_k)$, $k \in \mathbb{N}$, где последовательность областей $\dots \ni D_{k+1} \ni D_k \ni \dots$ в пересечении даёт область D . Обнадёживающим фактором в пользу справедливости Гипотезы 1 может служить подобный известный факт для потенциалов в пространствах выметаний [49; VI, 10.2–5]. Справедливость Гипотезы 1 дало бы дальнейшее развитие обобщенной формулы Пуассона–Йенсена из Предложения 2.3 вплоть до применения к тестовым функциям, продолженным на $\mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\}$ в рамках Замечания 2.6 (см. и первое из заключительных замечаний в п. 6.2.4 ниже).

2.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. Будет использована построенная в п. 2.4.2 возрастающая к функции \tilde{V} из (2.19) последовательность потенциалов Йенсена $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ со свойствами (2.30). Каждому потенциалу Йенсена V_n по Предложению 2.2 с отображением \mathcal{P} из (2.10) соответствует мера Йенсена μ_n внутри области D в точке $z_0 \in D \setminus \text{dom } M$:

$$\mu_n := \mathcal{P}^{-1}(V_n) \stackrel{(2.11), (2.30a)}{=} \frac{1}{2\pi} \Delta V_n \in PJ_{z_0}(D), \quad \text{supp } \mu_n \stackrel{(2.30h)}{\subset} D \setminus D_0. \quad (2.33)$$

Пусть $M = u_1 - u_2$, где $u_1, u_2 \in \text{sbh}(D)$ с мерами Рисса $\nu_M^+, \nu_M^- \in \mathcal{M}^+(D)$ соответственно, причём по определению δ -субгармонической функции ввиду $z_0 \in \text{dom } M$ имеем $u_1(z_0) \neq -\infty$ и $u_2(z_0) \neq -\infty$. При этом, если $u(z_0) = -\infty$ или не выполнены условия

$$\int_{D \setminus D_0} v d\nu_M^- \stackrel{(2.1)}{<} +\infty, \quad \int_{\tilde{D} \setminus D_0} g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0) d\nu_M^- < +\infty, \quad (2.34)$$

то неравенство (2.4) тривиально. Поэтому можем рассмотреть только случай, когда $u(z_0) \neq -\infty$ и одновременно выполнено (2.34).

По обобщённой формуле Пуассона–Йенсена из Предложения 2.3, применённой к субгармоническим функциям u, u_1, u_2 , получаем

$$u(z_0) + \int_{D \setminus \{z_0\}} V_n d\nu_u \stackrel{(2.12), (2.33)}{=} \int_{D \setminus D_0} u d\mu_n, \quad (2.35u)$$

$$u_1(z_0) + \int_{D \setminus \{z_0\}} V_n d\nu_M^+ \stackrel{(2.12), (2.33)}{=} \int_{D \setminus D_0} u_1 d\mu_n, \quad (2.35u_1)$$

$$u_2(z_0) + \int_{D \setminus \{z_0\}} V_n d\nu_M^- \stackrel{(2.12), (2.33)}{=} \int_{D \setminus D_0} u_2 d\mu_n. \quad (2.35u_2)$$

Из условия $u \leq M = u_1 - u_2$ на $D \setminus D_0$ для правых частей равенств (2.35) получаем

$$\int_{D \setminus D_0} u d\mu_n \leq \int_{D \setminus D_0} M d\mu_n = \int_{D \setminus D_0} u_1 d\mu_n - \int_{D \setminus D_0} u_2 d\mu_n,$$

откуда по обобщённым формулам Пуассона–Йенсена (2.35)

$$u(z_0) + \int_{D \setminus \{z_0\}} V_n d\nu_u + \int_{D \setminus \{z_0\}} V_n d\nu_M^- \leq M(z_0) + \int_{D \setminus \{z_0\}} V_n d\nu_M^+. \quad (2.36)$$

Напомним, что последовательность функций V_n , возрастает и стремится к \tilde{V} на D поточечно. Тогда, очевидно, из (2.36) следует

$$u(z_0) + \int_{D \setminus \{z_0\}} V_n d\nu_u + \int_{D \setminus \{z_0\}} V_n d\nu_M^- \leq M(z_0) + \int_{D \setminus \{z_0\}} \tilde{V} d\nu_M^+, \quad (2.37)$$

где для правой части допускается и значение $+\infty$. Если этот интеграл действительно равен $+\infty$, то ввиду конечности интеграла (2.2) для $z = z_0 \in \text{dom } M$

$$+\infty = \int_{D \setminus \tilde{D}} \tilde{V} d\nu_M^+ \stackrel{(2.19)}{=} \int_{D \setminus \tilde{D}} \tilde{c} \cdot v d\nu_M^+,$$

откуда, ввиду конечности первого интеграла в (2.34), следует, что первый интеграл в правой части (2.4v) также равен $+\infty$ и доказывать нечего. Поэтому далее предполагаем, что интеграл в правой части (2.37) конечен. Применяя Теорему Бешпо́ Лёви о монотонной сходимости интегралов к левой части (2.37), получаем

$$u(z_0) + \int_{D \setminus \{z_0\}} \tilde{V} d\nu_u + \int_{D \setminus \{z_0\}} \tilde{V} d\nu_M^- \leq M(z_0) + \int_{D \setminus \{z_0\}} \tilde{V} d\nu_M^+. \quad (2.38)$$

Здесь в силу (2.19)

$$\tilde{V} = \begin{cases} g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0) & \text{на } D_0, \\ \max\{g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0), \tilde{c} \cdot v\} & \text{на } \tilde{D} \setminus D_0, \\ \tilde{c} \cdot v & \text{на } D \setminus \tilde{D}. \end{cases}$$

Из этих равенств применительно к (2.38), учитывая (2.1), получаем

$$\begin{aligned} & u(z_0) + \int_{D_0} g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0) d\nu_u + \int_{D \setminus D_0} \tilde{c} \cdot v d\nu_u \\ & \leq M(z_0) + \int_{D_0} g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0) d\nu_M + \int_{\tilde{D} \setminus D_0} \max\{g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0), \tilde{c} \cdot v\} d\nu_M + \int_{D \setminus \tilde{D}} \tilde{c} \cdot v d\nu_M, \end{aligned}$$

откуда, после отбрасывания второго положительного слагаемого-интеграла в левой части и деления обеих частей на постоянную \tilde{c} из (2.18), с постоянной

$$C := \frac{1}{\tilde{c}} \stackrel{(2.18)}{=} \frac{b}{\inf_{z \in \partial D_0} g_{\tilde{D}}(z, z_0)} > 0$$

вида (2.3) следует

$$\begin{aligned} Cu(z_0) + \int_{D \setminus D_0} v d\nu_u & \leq \int_{D \setminus \tilde{D}} v d\nu_M \\ & + C \int_{D_0} g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0) d\nu_M + \int_{\tilde{D} \setminus D_0} \max\{Cg_{\tilde{D}}(\cdot, z_0), v\} d\nu_M^+ + CM(z_0). \end{aligned} \quad (2.39)$$

В силу очевидного для положительных функций неравенства

$$\max\{Cg_{\tilde{D}}(\cdot, z_0), v\} \leq Cg_{\tilde{D}}(\cdot, z_0) + v \quad \text{на } D \setminus D_0 \quad (2.40)$$

из (2.39) получаем

$$\begin{aligned} Cu(z_0) + \int_{D \setminus D_0} v d\nu_u & \leq \int_{D \setminus D_0} v d\nu_M + \int_{\tilde{D} \setminus D_0} v d\nu_M^- \\ & + C \int_{\tilde{D}} g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0) d\nu_M + C \int_{\tilde{D} \setminus D_0} g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0) d\nu_M^- + CM(z_0), \end{aligned}$$

что и доказывает требуемое (2.4). Наконец, если $\tilde{D} \Subset D$, то как второй интеграл в правой части (2.4v) ввиду ограниченности v на $\tilde{D} \setminus D_0$, так и интегралы из

(2.4C) ввиду (2.2) для $z_0 \in \text{dom } M$, участвующие в определении величины \overline{C}_M , конечны. Свойства положительной однородности и полуаддитивности для \overline{C}_M по M — следствие явного представления её в (2.4C) как суммы интегралов по заряду ν_M , мере ν_M^- и значения $M(z_0)$, зависящим от M подобным же образом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Доказательство Основной Теоремы проходит без каких-либо существенных усложнений и для тестовых функций из Замечания 1.2, т. е. с функциями $v \stackrel{(1.12b)}{\in} \text{sbh}_0^+(D \setminus \text{clos } D_0; \leq b)$ в п. (iii).

2.6. Субгармоническая мажоранта M . Приведем здесь

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если $u(z_0) = -\infty$, то доказывать нечего. То же самое, если интегралы в правых частях (1.17)–(1.18) равны $+\infty$. Поэтому предполагаем, что $u(z_0) > -\infty$ и конечность этих интегралов. Для частного случая $-\infty \neq M \in \text{sbh}(D)$ Основной Теоремы, очевидно, $\nu_M^- = 0$ и в правой части неравенства (2.4) из (2.34) интегралы по мере ν_M^- равны нулю. По условию также $M(z_0) \neq -\infty$. Всегда можно подобрать регулярную область $\tilde{D} \Subset D$, к примеру, ограниченную конечным числом гладких жордановых дуг [8; гл. V, § 4], для которой $D_0 \Subset \tilde{D}$. Таким образом, для любой тестовой функции $v \stackrel{(1.10)}{\in} \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b)$ из неравенства (2.4) получаем

$$\int_{D \setminus D_0} v d\nu_u \leq \int_{D \setminus D_0} v d\nu_M - Cu(z_0) + C \int_{\tilde{D}} g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0) d\nu_M + CM(z_0). \quad (2.41)$$

При этом выбор области \tilde{D} полностью обусловлен лишь взаимным расположением областей D_0 и D , т. е. в выборе постоянной C в (2.3) влияние области \tilde{D} можно заменить на зависимость от областей D_0 и D , как для постоянной C из (1.16). Возможность выбора постоянной

$$\overline{C}_M := \int_{\tilde{D}} g_{\tilde{D}}(\cdot, z_0) d\nu_M + M(z_0) \quad (2.42)$$

как в (1.16) положительно однородной и полуаддитивной сверху по M следует из её явного вида (2.42). Это и (2.41) даёт (1.17) с постоянными C, \overline{C}_M из (1.16). Из (1.17) для функции $u = \log |f|$ с функцией $f \in \text{Hol}(D) \setminus \{0\}$, удовлетворяющей неравенству $\log |f| \leq M$ на $D \setminus D_0$ согласно (1.7)–(1.8) ввиду $n_Z \leq n_{\text{Zero}_f}$ при $f(Z) = 0$ следует (1.18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1.1. Всегда можно выбрать точку $z_0 \in D_0$ так, что $u(z_0) \neq -\infty$. Из (2.16) и условия $v \in \text{sbh}^+(D \setminus D_0)$, по принципу максимума $b := \sup_{z \in \partial D_0} v(z) < +\infty$ и, следовательно, $v \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b)$. Тогда по Теореме 1 из конечности левой части импликации (1.14) для $u \leq M$ на $D \setminus D_0$ из неравенства (1.17) получаем требуемую конечность правой части (1.14). Соответственно, для $\log |f| \leq M$ на $D \setminus D_0$ из (1.18) следует (1.15).

§ 3. Обратные теоремы

Результаты раздела дают некоторые формы обращения Основной Теоремы и Теоремы 1 на определённых специальных подклассах тестовых функций.

3.1. Обращение с финитными тестовыми функциями. Используем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Тестовую функцию $v \stackrel{(1.10)}{\in} \text{sbl}_0^+(D \setminus D_0)$ из Определения 1 называем *финитной*, если для неё справедливо усиление условия (1.9): *существует подобласть $D_v \Subset D$, для которой $v|_{D \setminus D_v} = 0$, т.е. вне $D_v \supset D_0$ функция v тождественно равна нулю.*

ТЕОРЕМА 2. Пусть D — область с неполярной границей, $M \in \delta\text{-sbl}(D)$ — нетривиальная функция с зарядом Рисса ν_M , $\nu \geq 0$ — борелевская мера на D , $b > 0$. Если существует постоянная $C \in \mathbb{R}$, с которой для всех финитных тестовых функций $v \in \text{sbl}_0^+(D \setminus D_0; \leq b)$ выполнено неравенство

$$\int_{D \setminus D_0} v \, d\nu \leq \int_{D \setminus D_0} v \, d\nu_M + C, \quad (3.1)$$

то для каждой непрерывной функции $r: D \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям

$$0 < r(z) < \text{dist}(z, \partial D) \quad \text{для всех } z \in D, \quad (3.2d)$$

$$\left\{ z \in D: D(z, r(z)) \cap D^0 \neq \emptyset \right\} \Subset D \quad \text{для любой подобласти } D^0 \Subset D, \quad (3.2c)$$

найдётся функция $u \in \text{sbl}(D) \setminus \{-\infty\}$ с мерой Рисса $\nu_u \geq \nu$, для которой

$$u(z) \leq M^{*r}(z) := \frac{1}{\lambda(D(r(z)))} \int_{D(z, r(z))} M \, d\lambda \quad \text{для всех } z \in D, \quad (3.3)$$

где $M^{*r}(z)$ — переменное усреднение функции M по кругам $D(z, r(z))$.

В частности, если функция M ещё и непрерывна, то можно подобрать функцию $u \in \text{sbl}(D) \setminus \{-\infty\}$ с мерой Рисса $\nu_u \geq \nu$ так, что $u \leq M$ на D .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Условие (3.2d) на функцию r естественно, поскольку только оно гарантирует существование усреднений M^{*r} всюду на D , а ограничение (3.2c) довольно слабое. Например, (3.2c) выполнено, если $\lim_{D \ni z' \rightarrow z} r(z') = 0$ для любой точки $z \in \partial D$, поскольку в этом случае выполнено условие $\lim_{D \ni z \rightarrow \partial D} r(z) = 0$ в смысле (2.15)–(2.16). Именно из ограничения (3.2c) на r легко следует, что для любой подобласти $D^0 \Subset D$ найдётся подобласть $D_1 \Subset D$ со свойствами $D^0 \Subset D_1$ и $D(z, r(z)) \cap D^0 = \emptyset$ для всех $z \in D \setminus D_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для меры ν на $D \supset D_0$ всегда можно подобрать точку $z_0 \in D_0 \cap \text{dom } M$, в которой для некоторого числа $r_0 > 0$ имеем соотношения

$$\left(\int_0^{r_0} \frac{\nu(z_0, t)}{t} \, dt < +\infty \right) \stackrel{(2.2)}{\iff} \left(\int_{D(z, r_0)} \log |z' - z_0| \, d\nu(z') > -\infty \right). \quad (3.4)$$

Это обеспечивает существование субгармонической функции $u_0 \neq -\infty$ с мерой Рисса в точности ν и свойством $u_0(z_0) \neq -\infty$ — см. п. 2 в подразделе 2.1.

Далее нам временно потребуется ограниченность функции M в окрестности точки z_0 . Для этого пока преобразуем её локально с сохранением условия (3.1). Выберем число $r_0 > 0$ столь малым, что $D(z_0, 3r_0) \Subset D_0$. Из представления

$M = u_+ - u_-$ в виде разности субгармонических функций $u_+, u_- \in \text{sbh}(D)$ можно локально изменить значения функции M в $D(z_0, 2r_0) \Subset D_0$: гармонически продолжить интегралом Пуассона функции u_+ и u_- внутрь круга $D(z_0, 2r_0)$ — обозначаем их как соответственно u_+^o и u_-^o . Тогда функция $M^o := u_+^o - u_-^o \in \delta\text{-sbh}(D)$ уже ограничена в окрестности замкнутого круга $\overline{D}(z_0, r_0)$, а (3.1) по-прежнему выполнено для всех финитных функций $v \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b)$. Пока будем обозначать функцию M^o прежним символом M .

Через $L_{\text{loc}}^1(S)$ обозначаем множество всех локально интегрируемых по мере Лебега λ функций на S со значениями в $[-\infty, +\infty]$. Будет использована

ТЕОРЕМА С (частный случай [34; Теорема 6]). Пусть $M \in L_{\text{loc}}^1(D)$, точка $z_0 \in D$, $u_0 \in \text{sbh}(D)$ с $u_0(z_0) \neq -\infty$. Если функция M ограничена в открытой окрестности замыкания $\text{clos } D_1$ какой-нибудь подобласти $D_1 \Subset D$, содержащей точку z_0 и существует постоянная $C_0 \in \mathbb{R}$, с которой

$$\int_D u_0 d\mu \leq \int_D M d\mu + C_0 \quad \text{для любой меры } \mu \in J_{z_0}(D), \quad (3.5)$$

то для каждой непрерывной функции $r: D \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию (3.2d), найдется субгармоническая на D функция $w \neq -\infty$, для которой

$$u_0 + w \leq M^{*r} \quad \text{на } D. \quad (3.6)$$

В нашем случае роль области D_1 будет играть круг $D(z_0, r_0)$.

Кроме того, потребуется

ЛЕММА 3.1. Пусть функция $M \in \delta\text{-sbh}(D)$ нетривиальная с зарядом Рисса ν_M , $z_0 \in \text{dom } M$, функция $u_0 \in \text{sbh}(D)$ с мерой Рисса ν , $u_0(z_0) \neq -\infty$, а $V \in PJ_{z_0}(D)$ — потенциал Йенсена и $C_1 \in \mathbb{R}$. Если

$$\int_{D \setminus \{z_0\}} V d\nu \leq \int_{D \setminus \{z_0\}} V d\nu_M + C_1, \quad (3.7)$$

то для меры Йенсена $\mu \stackrel{(2.11)}{=} \mathcal{P}^{-1}(V) \in J_{z_0}(D)$ справедливо неравенство

$$\int_D u_0 d\mu \leq \int M d\mu + C_0, \quad \text{где } C_0 = C_1 - M(z_0) + u_0(z_0). \quad (3.8)$$

Действительно, при условии $z_0 \in \text{dom } M$ функция M представима в виде разности $M = u_+ - u_-$ субгармонических функций $u_+, u_- \in \text{sbh}(D)$ с мерами Рисса соответственно $\nu_M^+, \nu_M^- \in M^+(D)$, для которых ввиду (2.2) имеем $u_+(z_0) \neq -\infty$ и $u_-(z_0) \neq -\infty$. К каждой из функций u_+, u_- применима обобщённая формула Пуассона–Йенсена Предложения 2.3, следовательно, она применима и к функции M . Тогда для меры Йенсена $\mu \stackrel{(2.11)}{=} \mathcal{P}^{-1}V$ имеем

$$\begin{aligned} \int_D u_0 d\mu &\stackrel{(2.12)}{=} \int_{D \setminus \{z_0\}} V d\nu + u_0(z_0) \\ &\stackrel{(3.7)}{\leq} \int_{D \setminus \{z_0\}} V d\nu_M + C_1 + u_0(z_0) \stackrel{(2.12)}{=} \int M d\mu - M(z_0) + C_1 + u_0(z_0), \end{aligned}$$

что и требуется в (3.8).

Вернёмся непосредственно к доказательству Теоремы 2.

Для области D с неполярной границей $\partial D \subset \mathbb{C}_\infty$ всегда существует функция Грина $g_D(\cdot, z_0)$ с полюсом в точке z_0 . Далее всюду в нашем доказательстве

$$g := g_D(\cdot, z_0) \quad \text{— функция Грина для } D \text{ с полюсом } z_0 \in D_0.$$

Здесь для нас важны только следующие её свойства (см. [1; 4.4], [3; 3.7, 5.7]):

$$(g1) \quad \lim_{z_0 \neq z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{l_{z_0}(z)} \stackrel{(2.61)}{=} 1 \quad \text{— нормировка в точке } z_0 \text{ (2.60);}$$

$$(g2) \quad g|_{D \setminus \{z_0\}} \in \text{har}^+(D \setminus \{z_0\}) \quad \text{— гармоничность и положительность в } D \setminus \{z_0\}.$$

В частности, из принципа максимума-минимума, ввиду $z_0 \in D_0 \Subset D$,

$$0 < \text{const}_{z_0, D_0, D} := B_0 := \sup_{z \in \partial D_0} g(z) < +\infty. \quad (3.9)$$

Пусть $V \in PJ_{z_0}(D)$ — произвольный потенциал Йенсена. Тогда ввиду (g1)–(g2)

$$\limsup_{D \ni z \rightarrow z_0} \frac{(V - g)(z)}{l_{z_0}(z)} \stackrel{(g1)}{\leq} 0, \quad (V - g)|_{D \setminus \{z_0\}} \stackrel{(g2)}{\in} \text{sbh}(D \setminus \{z_0\}).$$

Отсюда точка z_0 — устранимая особенность для функции $V - g$ и, поскольку

$$\limsup_{D \ni z' \rightarrow z} (V - g)(z') \leq \limsup_{D \ni z' \rightarrow z} V(z') = 0 \quad \text{для всех } z \in \partial D,$$

для функции $V - g \in \text{sbh}(D)$ по принципу максимума $V - g \leq 0$ на D . Отсюда

$$V \leq g \quad \text{на } D, \quad V \stackrel{(3.9)}{\leq} B_0 \quad \text{на } \partial D_0. \quad (3.10)$$

Следовательно, для рассматриваемой в открытой окрестности $D \setminus D_0$ функции

$$v := \frac{b}{B_0} V \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b)$$

справедливо неравенство (3.1). Умножая обе его части на B_0/b , получаем

$$\int_{D \setminus D_0} V d\nu \leq \int_{D \setminus D_0} V d\nu_M + \frac{B_0}{b} C \quad \text{для всех } V \in PJ_{z_0}(D).$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus \{z_0\}} V d\nu &\leq \int_{D \setminus \{z_0\}} V d\nu_M \\ &+ \frac{B_0}{b} C + \int_{D_0 \setminus \{z_0\}} V d\nu + \int_{D_0 \setminus \{z_0\}} V d\nu_M^- \stackrel{(3.10)}{\leq} \int_{D \setminus \{z_0\}} V d\nu_M \\ &+ \left(\frac{B_0}{b} C + \int_{D_0 \setminus \{z_0\}} g d\nu + \int_{D_0 \setminus \{z_0\}} g d\nu_M^- \right) \quad \text{для всех } V \in PJ_{z_0}(D). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Два последних интеграла здесь конечны ввиду (3.4) и $z_0 \in D_0 \cap \text{dom } M$, обеспечивающем выполнение (2.2). Кроме того, они не зависят от $V \in PJ_{z_0}(D)$. Таким образом, с постоянной C_1 , равной значению «большой» скобки в конце (3.11), выполнено (3.7) для любого потенциала $V \in PJ_{z_0}(D)$. Отсюда по Лемме 3.1 имеет место (3.8) для любой меры Йенсена $\mu \in J_{z_0}(D)$. Следовательно, выполнено условие (3.5) Теоремы С и найдётся функция $w \in \text{sbh}(D)$, для которой имеем (3.6). При этом с мерой Рисса ν_w функции w , очевидно, выполнено неравенство $\nu + \nu_w \geq \nu$ на D . Следовательно, функция $u^o := u_0 + w$ с мерой Рисса $\nu_{u^o} = \nu + \nu_w$ — требуемая в (3.3), но пока для функции $M = M^o$, отличающейся от M в круге $D(z_0, 2r_0)$. Вернёмся к прежним обозначениям $M \leq M^o$. Для непрерывной функции r функции M^{*r} , $(M^o)^{*r}$ также непрерывны в D , поскольку обе они из класса $L^1_{\text{loc}}(D)$. В то же время субгармоническая функция $u^o \neq -\infty$ ограничена сверху в $D(z_0, 3r_0) \Subset D$. Следовательно, можно выбрать достаточно большую постоянную $C_3 \geq 0$ так, что $u_0 := u^o - C_3 \leq (M^o)^{*r}$ на D с мерой Рисса $\nu_{u_0} = \nu_{u^o} \geq \nu$. По условию (3.2с) и Замечанию 3.1 найдётся подобласть $D_1 \Subset D$, включающая в себя $D(z_0, r_0)$, для которой по построению M^o и определению усреднения выполнены равенства $(M^o)^{*r} = M^{*r}$, а значит и неравенство $u_0 \leq M^{*r}$ на $D \setminus D_1$. Поскольку функция M^{*r} непрерывна на D , а u_0 ограничена сверху на D_1 , можно выбрать достаточно большую постоянную $C_4 \geq 0$ так, что $u := u_0 - C_4 \leq M^{*r}$ на D с мерой Рисса $\nu_u = \nu_{u_0} \geq \nu$, что и требовалось. Непрерывная функция M изначально локально ограничена снизу, что позволяет избежать в доказательстве промежуточного использования функции M^o . Кроме того, функция M локально равномерно непрерывна, что позволяет выбрать непрерывную функцию r , удовлетворяющую (3.2), с которой $M^{*r} \leq M + 1$ на D , и заменить правую часть в (3.3) на M .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Проверку равномерного по v условия, требующего выполнения неравенства (3.1) в Теореме 2, можно ослабить в направлении сужения класса тестовых функций. Конкретнее, для произвольного множества F функций на открытых множествах из \mathbb{C}_∞ со значениями в \mathbb{R} используем обозначение $C^\infty \cap F$ для всех бесконечно дифференцируемых функций из F .

ДОПОЛНЕНИЕ 3.1 к Теореме 2. В Теореме 2 достаточно требовать, чтобы с некоторой постоянной $C \in \mathbb{R}$ неравенство (3.1) выполнялось для всех тестовых финитных функций $v \in C^\infty \cap \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b)$ — произвольная финитная тестовая функция. По Определениям 1, 5 найдутся открытые множества $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}$ в \mathbb{C}_∞ , обладающие свойствами: $D_0 \Subset \mathcal{O}_0 \Subset \mathcal{O} \Subset D$, функция v субгармоническая в $D \setminus \mathcal{O}_0$ и тождественно равна нулю в $D \setminus \mathcal{O}$. В частности, положим

$$\varepsilon_0 := \text{dist}(\mathcal{O}_0, \mathbb{C}_\infty \setminus D_0) > 0, \quad \varepsilon_o := \text{dist}(\mathcal{O}, \mathbb{C}_\infty \setminus D) > 0, \quad \varepsilon^o := \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_o\} > 0.$$

Рассмотрим функцию $a: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ класса C^∞ с $\text{supp } a \Subset (0, 1)$ и нормировкой $\int_0^{+\infty} a(x) dx = 1$, а также меры α_ε , определяемые плотностями

$$d\alpha_\varepsilon(z) := \frac{1}{\varepsilon^2} a(|z|/\varepsilon) d\lambda(z), \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon^o.$$

Как известно [1; 2.7], [3; 3.4.1], для убывающей последовательности строго положительных чисел $\varepsilon_n \rightarrow 0$ последовательность субгармонических бесконечно

дифференцируемых функций-свёрток $v_n := v * \alpha_{\varepsilon_n}$, убывая по n , поточечно стремиться к функции v . В частности, $v \leq v_n$ на $D \setminus D_0$. При этом, поскольку ∂D_0 — компакт, величины $\sup_{z \in \partial D_0} v_n =: b_n$ стремятся к b при $n \rightarrow +\infty$. Пусть зафиксировано произвольное число $b' > b$. По построению, начиная с некоторого n , функции $v_n \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b')$ *тестовые финитные*. По условию Дополнения найдётся число C' , с которым

$$\int_{D \setminus D_0} v_n d\nu \leq \int_{D \setminus D_0} v_n d\nu_M + C'$$

для всех построенных функций v_n при всех $n \geq n_0 := \text{const}_{\varepsilon^o, b', v}$. Отсюда по разложению Хана–Жордана для заряда Рисса $\nu_M = \nu_M^+ - \nu_M^-$

$$\int_{D \setminus D_0} v_n d(\nu + \nu_M^-) \leq \int_{D \setminus D_0} v_n d\nu_M^+ + C' \quad \text{для всех } n \geq n_0.$$

Следовательно, ввиду $v \leq v_n$ на $D \setminus D_0$, получаем

$$\int_{D \setminus D_0} v d\nu \leq \int_{D \setminus D_0} v_n d\nu_M^+ - \int_{D \setminus D_0} v d\nu_M^- + C' \quad \text{для всех } n \geq n_0.$$

Устремляя в первом интеграле справа n к $+\infty$, по Теореме Беппо Лёви имеем

$$\int_{D \setminus D_0} v d\nu \leq \int_{D \setminus D_0} v d\nu_M^+ - \int_{D \setminus D_0} v d\nu_M^- + C' = \int_{D \setminus D_0} v d\nu_M + C'.$$

В силу произвола в выборе финитной функции $v \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b)$ неравенство (3.1) с постоянной $C := C'$ выполнено для всех таких v , что и нужно.

ДОПОЛНЕНИЕ 3.2 к Теореме 2. В случае субгармонической функции $M \in \text{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$ наряду с Дополнением 3.1 в Теореме 2 достаточно требовать, чтобы функция r с условиями (3.2) была лишь локально отделённой от нуля снизу в том смысле, что для любого $z \in D$ найдутся числа $t_z, c_z > 0$, для которых $r(z') \geq c_z$ для всех $z' \in D(z, t_z) \Subset D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементарно, из соображений, использующих компактность, например, с использованием исчерпания области D относительно компактными подобластями, устанавливается

ЛЕММА 3.2. Для любой отделённой от нуля снизу функции r на D , удовлетворяющей условиям (3.2), найдётся непрерывная, даже бесконечно дифференцируемая, функция $r' \leq r$, по-прежнему удовлетворяющая условиям (3.2).

Применяя Теорему 2 с непрерывной функцией r' вместо r строим требуемую $u \leq M^{*r'} \leq M^{*r}$, где при последнем переходе использовано возрастание усреднений в круге субгармонической функции M по радиусу круга.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть в условиях Теоремы 2 функция M непрерывна, а мера $\nu \stackrel{(1.7)}{:=} n_Z$ — считающая мера некоторой последовательности точек $Z =$

$\{z_k\}_{k=1,2,\dots} \subset D$ без точек сгущения в D , т. е. условие (3.1) заменяется на эквивалентное неравенство

$$\sum_{z_k \in D \setminus D_0} v(z_k) \leq \int_{D \setminus D_0} v dv_M + C \quad \text{для всех финитных } v \in C^\infty \cap \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b).$$

Для единообразия формулировки предполагаем, что $D \subset \mathbb{C}$, т. е. $\infty \notin D$.

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся ненулевая функция $f \in \text{Hol}(D)$, для которой $f(Z) = 0$ и выполнены неравенства

$$\log|f(z)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(r)} M(z + z') d\lambda(z') + \log \frac{1}{r} + (1 + \varepsilon) \log(1 + |z| + r) \quad (3.12)$$

в каждой точке $z \in D$ с любым числом r , удовлетворяющим условию

$$0 < r < \text{dist}(z, \mathbb{C}_\infty \setminus D). \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По Теореме 2 и Дополнениям 3.1–3.2 существует функция $u \in \text{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$ с мерой Рисса $\nu_u \geq n_Z$, удовлетворяющая неравенству $u \leq M$ на D . Пусть $f_Z \in \text{Hol}(D)$ — некоторая функция с последовательностью нулей $\text{Zero}_{f_Z} = Z$, которая всегда существует по классической Теореме Вейерштрасса. Тогда для нетривиальной функции $w := u - \log|f_Z| \in \delta\text{-sbh}(D)$ её заряд Рисса $\nu_w = \nu_u - n_Z \geq 0$ положителен, т. е. ν_w — мера Рисса уже субгармонической функции $w \in \text{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$. При этом по построению

$$\log|f_Z| + w \leq M \quad \text{на } D. \quad (3.14)$$

Усредним по кругам $D(z, r)$ по мере Лебега λ обе части (3.14):

$$\frac{1}{\lambda(D(r))} \int_{D(z,r)} \log|f_Z| d\lambda + \frac{1}{\lambda(D(r))} \int_{D(z,r)} w d\lambda \leq \frac{1}{\lambda(D(r))} \int_{D(z,r)} M d\lambda$$

для всех $z \in D$ и $0 < r < \text{dist}(z, \mathbb{C}_\infty \setminus D)$. Поскольку субгармонические функции не превышают их усреднений по кругам, последнее соотношение даёт

$$\log|f_Z(z)| + \frac{1}{\lambda(D(r))} \int_{D(z,r)} w d\lambda \leq \frac{1}{\lambda(D(r))} \int_{D(z,r)} M d\lambda \quad \text{для всех } z \in D. \quad (3.15)$$

В [51; Theorem 1], [52; Теорема 1], [53; Теорема 3]

ЛЕММА 3.3 [51; Theorem 1], [52; Теорема 1], [53; Теорема 3]. Для любой функции $w \in \text{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся ненулевая функция $f_\varepsilon \in \text{Hol}(D)$, для которой

$$\log|f_\varepsilon(z)| \leq \frac{1}{\lambda(D(r))} \int_{D(z,r)} w d\lambda + \log \frac{1}{r} + (1 + \varepsilon) \log(1 + |z| + r) \quad (3.16)$$

во всех точках $z \in D \subset \mathbb{C}$ при любых r , удовлетворяющих условиям (3.13).

По Лемме 3.3 для всех $z \in D$ и всех r из (3.13) согласно (3.15) имеем

$$\log|f_Z(z)| + \log|f_\varepsilon(z)| \leq \frac{1}{\lambda(D(r))} \int_{D(z,r)} M d\lambda + \log \frac{1}{r} + (1 + \varepsilon) \log(1 + |z| + r),$$

и функция $f := f_Z f_\varepsilon \neq 0$ — требуемая, поскольку выполнено (3.12) и $f_Z(Z) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Следствие 3.1 остаётся в силе и при $\infty \in D \subset \mathbb{C}_\infty$, если в последнем слагаемом в правой части (3.12) в подлогарифмическом выражении заменить величину $|z|$ на $\frac{1}{|z-z_0|}$, где $z_0 \notin D$ — произвольная точка в $\mathbb{C} \setminus D$.

Иногда переменные r и $|z|$ в последних двух слагаемых в правой части (3.16) бывает удобно разделить. Один из вариантов даётся неравенством

$$\log \frac{1}{r} + (1 + \varepsilon) \log(1 + |z| + r) \leq \log \frac{(1 + r)^{1+\varepsilon}}{r} + (1 + \varepsilon) \log(1 + |z|).$$

3.2. Обращения с более узкими классами тестовых функций.

3.2.1. Обращение с функциями Грина. В теореме обращения этого пункта используются лишь продолженные функции Грина специальной системы относительно компактных регулярных подобластей области⁵ D , содержащих D_0 с фиксированным полюсом $z_0 \in D_0$. Отметим, что каждая такая функция Грина — тестовая финитная функция для области D вне подобласти D_0 по Определениям 1, 5 согласно Предложению 2.1 и его реализации в Примере 2.2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 (см. [34; Определение 1], [50; Определение 1]). Систему регулярных областей $\mathcal{U}_{D_0}(D) \subset \{D' \in D: D_0 \subset D'\}$ называем *регулярной оптимально исчерпывающей* в D с центром D_0 , если для любых двух областей D_1 и D_2 при $D_0 \subset D_1 \subseteq D_2 \subset D$ выполнены два условия:

- 1) можно подобрать область $D' \in \mathcal{U}_{D_0}(D)$ так, что $D_1 \subseteq D' \subseteq D_2$ и каждая непустая ограниченная компонента связности дополнительного множества $\mathbb{C}_\infty \setminus D'$ пересекает дополнение $\mathbb{C}_\infty \setminus D_2$;
- 2) для любой области $D' \in \mathcal{U}_{D_0}(D)$ найдётся область $D'' \in \mathcal{U}_{D_0}(D)$, с которыми $D_1 \subseteq D'' \subseteq D_2$ и объединение $D'' \cup D'$ также принадлежит $\mathcal{U}_{D_0}(D)$;

и, кроме того, эта система условно инвариантна относительно сдвига в D , т. е. из $D' \in \mathcal{U}_{D_0}(D)$, $z \in \mathbb{C}$ и $D_0 \subset D' + z \subseteq \Omega$ следует, что $D' + z \in \mathcal{U}_{D_0}(D)$.

Простым примером регулярной оптимально исчерпывающей системы областей может служить специальная система $\mathcal{U}_{D_0}^d(D)$ всевозможных связанных объединений $D' \supset D_0$ конечного числа кругов $D(z, t) \subseteq D$, исключая те области D' , в дополнении $\mathbb{C}_\infty \setminus D'$ которых есть изолированные точки. С такими же исключениями круги в этом примере можно заменить на относительно компактные в D всевозможные, вообще говоря, с несвязной границей, n -угольники или, более общо, односвязные подобласти [1; Theorems 4.2.1–4.2.2], [3; 2.6.3] какого-либо специального типа.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $M = M_+ - M_- \in \delta\text{-sbh}(D)$ с зарядом Рисса ν_M , где $M_+ \in \text{sbh}(D) \cap C(D)$ и $M_- \in \text{sbh}(D)$, а также $z_0 \in D \cap \text{dom } M \in D$.

Пусть $\nu \geq 0$ — борелевская мера на D и в точке z_0 для меры ν выполнено условие типа (2.2), т. е. при некотором $r_0 > 0$, для которого $D(z_0, r_0) \subseteq D$, конечен один, или каждый, из интегралов в (3.4). Пусть $\mathcal{U}_{D_0}(D)$ — регулярная оптимально исчерпывающая система областей в D с центром $D_0 \subset D$ и $z_0 \in D_0$. Пусть с некоторой постоянной $C \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства

$$\int_{D \setminus \{z_0\}} g_{D'}(\cdot, z_0) d\nu \leq \int_{D \setminus \{z_0\}} g_{D'}(\cdot, z_0) d\nu_M + C \text{ для всех } D' \in \mathcal{U}_{D_0}(D). \quad (3.17)$$

⁵Здесь уже, в отличие от Теоремы 2, область $D \subset \mathbb{C}_\infty$ произвольная.

Тогда найдётся функция $u \in \text{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$ с мерой Рисса $\nu_u \geq \nu$, удовлетворяющая ограничению $u \leq M$ на D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ν_{M_+} и ν_{M_-} — меры Рисса соотв. функций M_+ и M_- . Равномерную по C серию неравенств (3.17) тогда можно записать в обозначении $\nu_1 := \nu + \nu_{M_-}$ в виде

$$\int_{D \setminus \{z_0\}} g_{D'}(\cdot, z_0) d\nu_1 \leq \int_{D \setminus \{z_0\}} g_{D'}(\cdot, z_0) d\nu_{M_+} + C \text{ для всех } D' \in \mathcal{U}_{D_0}(D), \quad (3.18)$$

где $\nu_1, \nu_{M_+} \in \mathcal{M}^+(D)$ — уже положительные меры. Очевидно, существует какая-нибудь субгармоническая в D функция $u_1 \neq -\infty$ с мерой Рисса ν_1 . Для её меры Рисса ν_1 , ввиду условия $z_0 \in \text{dom } M$, т.е. условия (2.2), а также условия (3.4) на z_0 , выполнено условие (3.4) с заменой ν на ν_1 . Следовательно, $M_-(z_0) \neq -\infty$ и обязательно $u_1(z_0) \neq -\infty$. Далее потребуется вариации утверждений из⁶ [34; Основная Теорема, Теорема 6]:

ТЕОРЕМА D (частный случай [50; Теорема (основная)]). Пусть функция $M \in \text{sbh}(D)$ с мерой Рисса ν_M ограничена снизу в некоторой окрестности замыкания $\text{clos } D_0$, $u \in \text{sbh}(D)$ — субгармоническая функция с мерой Рисса ν на D и $u(z_0) \neq -\infty$, система областей $\mathcal{U}_{D_0}(D)$ — регулярная оптимально исчерпывающая для D с центром $D_0 \ni z_0$. Если имеет место соотношение

$$-\infty < \inf_{D' \in \mathcal{U}_{D_0}(D)} \left(- \int_{D \setminus \{z_0\}} g_{D'}(\cdot, z_0) d\nu_u + \int_{D \setminus \{z_0\}} g_{D'}(\cdot, z_0) d\nu_M \right), \quad (3.19)$$

то для любой непрерывной функции $r: D \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условию (3.2d), найдётся субгармоническая в D функция $v \neq -\infty$, гармоническая в некоторой окрестности точки z_0 , с которой $u + v \stackrel{(3.3)}{\leq} M^{*r}$ на D . При этом если функция M ещё и непрерывная в D , то переменное усреднение M^{*r} в правой части последнего неравенства можно заменить на саму функцию M .

ДОПОЛНЕНИЕ 3.3 к Теореме D. Условие Теоремы D об ограниченности снизу функции $M \in \text{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$ в окрестности замыкания $\text{clos } D_0 \Subset D$ при дополнительном ограничении (3.2c) на функцию r можно заменить на более слабое условие $M(z_0) \neq -\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДОПОЛНЕНИЯ 3.3. Пусть для произвольной субгармонической функции M с $M(z_0) \neq -\infty$ выполнено (3.19). В эквивалентной формулировке это означает, что найдётся число $C \in \mathbb{R}$, с которым

$$\int_{D \setminus \{z_0\}} g_{D'}(\cdot, z_0) d\nu \leq \int_{D \setminus \{z_0\}} g_{D'}(\cdot, z_0) d\nu_M + C \text{ для всех } D' \in \mathcal{U}_{D_0}(D), \quad (3.20)$$

Всегда можно выбрать некоторую регулярную подобласть $D^0 \Subset D$, включающую в себя $D_0 \Subset D^0$. Рассмотрим новую функцию M_0 , совпадающую с M на

⁶К сожалению, в формулировке Основной теоремы из нашей работы [34], на промежуточном этапе доказательства которой и основано [50; Теорема (основная)], допущена досадная опечатка в знаках \pm . Так, в её формулировке (2.11) из п. (h1) должно выглядеть в точности как (3.19). Дальнейший комментарий — в сноске к [50; Теорема (основная)].

$D \setminus D^0$ и заданную как гармоническое продолжение функции $M|_{\partial D^0}$ внутрь области D^0 . Тогда [3; Теорема 2.18] $M_0 \in \text{sbh}(D)$, $M \leq M_0$ на D и, очевидно, функция M_0 ограничена снизу в окрестности D^0 замыкания $\text{clos } D_0$. Из классической формулы Пуассона–Йенсена (2.13) применительно к M_0 и M

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus \{z_0\}} g_{D'}(\cdot, z_0) d\nu_M &\stackrel{(2.13)}{=} \int_{D'} M d\omega_{D'}(z_0, \cdot) - M(z_0) \\ &\leq \int_{D'} M_0 d\omega_{D'}(z_0, \cdot) - M(z_0) \stackrel{(2.13)}{=} \int_{D \setminus \{z_0\}} g_{D'}(\cdot, z_0) d\nu_{M_0} + M_0(z_0) - M(z_0) \end{aligned}$$

для любой области $D' \in \mathcal{U}_{D_0}(D)$, где ν_{M_0} — мера Рисса функции M_0 . Из (3.20)

$$\int_{D \setminus \{z_0\}} g_{D'}(\cdot, z_0) d\nu \leq \int_{D \setminus \{z_0\}} g_{D'}(\cdot, z_0) d\nu_{M_0} + C_0 \text{ для всех } D' \in \mathcal{U}_{D_0}(D),$$

где $C_0 := C + M_0(z_0) - M(z_0) \in \mathbb{R}$. Следовательно, по Теореме D существует функция $v \in \text{sbh}(D)$, с которой $u + v \leq M_0^{*r}$ на D , где M_0^{*r} — непрерывная функция на D , как, впрочем, и функция M^{*r} . При этом из ограничения (3.2с) на r следует, что найдётся подобласть $D_1 \Subset D$ со свойствами $D^0 \Subset D_1$ и $D(z, r(z)) \cap D^0 = \emptyset$ для всех $z \in D \setminus D_1$. По построению M_0 имеем $M_0^{*r} = M^{*r}$ на $D \setminus D_1$ и, в силу непрерывности этих функций на D , существует постоянная $C_0 \geq 0$, для которой $M_0^{*r} \leq M^{*r} + C_0$ уже всюду на D . Таким образом, $u + (v - C_0) \leq M^{*r}$ на D . Тем самым Дополнение 3.3 доказано.

Продолжим доказательство Теоремы 3.3. По Теореме D с Дополнением 3.3, применённым к функциям u_1 и непрерывной функции M_+ вместо соотв. u и M , ввиду (3.18) найдётся функция $v \in \text{sbh}(D)$, гармоническая в окрестности точки z_0 , с которой $u_1 + v \leq M_+$ на D . По построению $u_1 \in \text{sbh}(D)$ с мерой Рисса $\nu_1 := \nu + \nu_{M_-}$. Следовательно, мера Рисса функции $u_0 := u_1 - M_-$ — это мера ν , т. е. существует функция $u := u_0 + v \in \text{sbh}(D)$ с мерой Рисса $\nu_u \geq \nu$, для которой $u \leq M_+ - M_- = M$ на D , что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть в условиях Теоремы 3 мера $\nu \stackrel{(1.7)}{:=} n_Z$ — считающая мера некоторой последовательности точек $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots} \subset D$ без точек сгущения в D , т. е. $z_0 \notin Z$, а условие (3.17) заменяется на неравенства

$$\sum_{z_k \in D'} g_{D'}(z_k, z_0) \leq \int_{D \setminus \{z_0\}} g_{D'}(\cdot, z_0) d\nu_M + C \text{ для всех } D' \in \mathcal{U}_{D_0}(D).$$

Тогда в предположении, что $D \subset \mathbb{C}$, т. е. $\infty \notin D$, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся ненулевая функция $f \in \text{Hol}(D)$, для которой $f(Z) = 0$ и выполнены неравенства (3.12) в каждой точке $z \in D$ с любым числом r , удовлетворяющим условию (3.13). При $\infty \in D$ изменения как в Замечании 3.3.

Выводится из Теоремы 3 так же, как Следствие 3.1 из Теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Регулярную оптимально исчерпывающую систему областей $\mathcal{U}_{D_0}(D)$ с центром $D_0 \subset D$ в Теореме 3 и Следствии 3.2 на основе анализа

тонких совместных результатов В. Хансена и И. Нетуки [54] об аппроксимации мер Йенсена гармоническими мерами можно заменить на систему областей $D' \in D$, включающих в себя область $D_0 \in D$ и полученных из исчерпывающей области D последовательности областей $D_n \in D$, $n \in \mathbb{N}$ с аналитической или кусочно линейной или иной «хорошей» границей удалением из D_n произвольного конечного набора попарно непересекающихся замкнутых кругов.

3.2.2. Обращение с аналитическими и полиномиальными дисками. Важный подкласс в классе $J_{z_0}(D)$ мер Йенсена порождают аналитические диски в D с центром z_0 . *Аналитическим диском в области D с центром в точке $z_0 \in D$* называется функция $g: \text{clos } \mathbb{D} \rightarrow D$, непрерывная на $\text{clos } \mathbb{D}$ с голоморфным сужением в \mathbb{D} , для которой $f(0) = z_0$ (см. [55], [56], [43])⁷. Для любого такого аналитического диска g легко показать, что функция

$$G(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| 1 - \frac{g(e^{i\theta})}{z} \right| d\theta$$

— потенциал Йенсена внутри области D с полюсом в точке z_0 и G обращается в нуль вне образа круга $\text{clos } \mathbb{D}$, т. е. $G(z) \equiv 0$ для всех $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus g(\text{clos } \mathbb{D})$.

Если аналитический диск g в D с центром $z_0 \in D$ — *многочлен* комплексной переменной, то естественно называть его *полиномиальным диском в D с центром в точке $z_0 \in D$* .

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $M \in \delta\text{-sbh}(D)$ с зарядом Рисса ν_M , точка z_0 и мера $\nu \geq 0$ такие же, как в Теореме 3. Если существует постоянная $C \in \mathbb{R}$, с которой неравенство

$$\int_{g(\text{clos } \mathbb{D})} \int_0^{2\pi} \log \left| 1 - \frac{g(e^{i\theta})}{z} \right| d\theta d\nu \leq \int_{g(\text{clos } \mathbb{D})} \int_0^{2\pi} \log \left| 1 - \frac{g(e^{i\theta})}{z} \right| d\theta d\nu_M + C$$

выполнено для всех аналитических или только полиномиальных дисков g в D с центром z_0 , то найдётся функция $u \in \text{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$ с мерой Рисса $\nu_u \geq \nu$, удовлетворяющая ограничению $u \leq M$ на D .

В случае субгармонической функции M обсуждение схемы доказательства Теоремы 4 содержится в [22; 1.2.1–1.2.2, Дополнения 1.2.3, 1.2.4]. Это одна из причин, по которой мы опускаем здесь доказательство Теоремы 4. Другая в том, что многомерный вариант Теоремы 4 в \mathbb{C}^n более естественен и будет рассмотрен с применениями в ином месте. Как и Следствия 3.1, 3.2 доказывается

СЛЕДСТВИЕ 3.3. В условиях Теоремы 4 вместо меры рассмотрим последовательность точек $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots} \subset D$ без точек сгущения в D . Если существует постоянная $C \in \mathbb{R}$, с которой неравенство

$$\int_0^{2\pi} \sum_{z_k \in g(\text{clos } \mathbb{D})} \log \left| 1 - \frac{g(e^{i\theta})}{z_k} \right| d\theta \leq \int_{g(\text{clos } \mathbb{D})} \int_0^{2\pi} \log \left| 1 - \frac{g(e^{i\theta})}{z} \right| d\theta d\nu_M + C$$

⁷ Если используются различные виды аналитических дисков, то рассматриваемые здесь аналитические диски у Е. Полецкого выделяются как *замкнутые* [56].

выполнено для всех аналитических или только полиномиальных дисков g в D с центром z_0 , то в предположении, что $\infty \notin D$, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся ненулевая функция $f \in \text{Hol}(D)$, для которой $f(z) = 0$ и выполнены неравенства (3.12) в каждой точке $z \in D$ с любым числом r , удовлетворяющим условию (3.13). При $\infty \in D$ изменения как в Замечании 3.3.

§ 4. Радиальные мажоранты M

Функция f на подмножестве $S \subset \mathbb{C}_\infty$, удовлетворяющем условию $e^{i\theta}S := \{e^{i\theta}z : z \in S\} = S$ для всех $\theta \in \mathbb{R}$, радиальная, если $f(ze^{i\theta}) = f(z)$ для любых $z \in S$ и $\theta \in \mathbb{R}$. Очевидно, такая функция однозначно определяется своим сужением на $S \cap [0, +\infty]$. Для такой функции f и $r \in S \cap [0, +\infty]$ через $f'_{\text{left}}(r)$ и $f'_{\text{right}}(r)$ обозначаем соответственно левую и правую производную сужения функции $f|_{S \cap \mathbb{R}^+}$ в тех точках $r \in S \cap [0, +\infty]$, в которых такая производная имеет смысл и существует. При этом для $r = +\infty$ используем инверсию \star из раздела 1.3 Введения, или \star_{z_0} в обозначении (2.17).

4.1. Радиальные субгармонические функции. Для $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ полагаем $A(r_1, r_2) := \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\} \subset \mathbb{C}$ — открытое кольцо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $M : A(r_1, r_2) \rightarrow \mathbb{R}$ — радиальная функция с сужением $m = M|_{(r_1, r_2)}$. Следующие пять утверждений попарно эквивалентны.

1. Функция M — субгармоническая в кольце $A(r_1, r_2)$, $M \neq -\infty$.
2. Функция $m : (r_1, r_2) \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая относительно \log , т. е. суперпозиция $m \circ \exp$ — выпуклая функция на $(\log r_1, \log r_2) \subset \mathbb{R}$.
3. Функция m непрерывна, во всех точках $r \in (r_1, r_2)$ существуют непрерывная слева левая производная $m'_{\text{left}}(r)$ и/или непрерывная справа правая производная $m'_{\text{right}}(r)$, а функции $r \mapsto rm'_{\text{left}}(r)$ и/или $r \mapsto rm'_{\text{right}}(r)$ возрастающие. При этом $m'_{\text{left}}(r) \leq m'_{\text{right}}(r)$ во всех точках $r \in (r_1, r_2)$ и непрерывны и совпадают всюду на (r_1, r_2) за исключением счётного множества значений r .
4. Для некоторого (любого) $r_0 \in (r_1, r_2)$ и некоторой возрастающей непрерывной вне счётного подмножества из (r_1, r_2) функция $n_0 : (r_1, r_2) \rightarrow \mathbb{R}$ справедливо представление с интегралом Римана

$$m(r) = m(r_0) + \int_{r_0}^r \frac{n_0(t)}{t} dt, \quad r \in (r_1, r_2). \quad (4.1)$$

Здесь можно выбрать функцию n_0 по правилу

$$n_0(r) := rm'_{\text{left}}(r) \quad \text{или} \quad n_0(r) := rm'_{\text{right}}(r), \quad r \in (r_1, r_2). \quad (4.2)$$

5. Функция m полунепрерывна сверху, локально интегрируема по мере Лебега на открытом интервале (r_1, r_2) и $r \mapsto (rm'(r))'$ (здесь уже дифференцирование распределения) — положительное распределение, или обобщённая функция, на классе финитных гладких функций на (r_1, r_2) , и даже положительная мера Радона, т. е. борелевская мера на (r_1, r_2) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все эти эквивалентности известны, но разбросаны по различным источникам. Так, эквивалентность $1 \Leftrightarrow 2$ — в [6; 1.П.10]. Импликация $2 \Rightarrow 3$ сразу следует из соответствующих свойств выпуклой функции $m \circ \exp$ — [5; Theorem 1.1.7], [6; 1.XIV.4]. Представление (4.1) при переходе $3 \Rightarrow 4$ получаем сразу при выборе n_0 как в (4.2). Импликация $4 \Rightarrow 5$ — результат дифференцирования по r тождества (4.1) и возрастания функции n_0 , почти всюду совпадающей с функциями из (4.2) [57; гл. VIII, § 2]. Наконец, если справедливо 5, то в полярных координатах $re^{i\theta} = z \in A(r_1, r_2)$, $r \in (r_1, r_2)$, оператор Лапласа Δ от полунепрерывной сверху локально интегрируемой по мере Лебега λ функции $M(re^{i\theta}) := m(r)$, $r \in (r_1, r_2)$, $\theta \in \mathbb{R}$, записывается через плотности мер и (тензорное) произведение положительных мер [58; гл. IV, § 8]

$$\frac{1}{2\pi} (\Delta M)(re^{i\theta}) d\lambda(re^{i\theta}) = d(rm'_{\text{left}}(r)) \otimes \frac{1}{2\pi} d\theta \geq 0. \quad (4.3)$$

Таким образом, $M \in \text{sbbh}(A(r_1, r_2))$ и цикл замыкается на утверждении 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Мера Рисса радиальной функции M описана в (4.3), где левую производную $m'_{\text{left}}(r)$ можно заменить на правую $m'_{\text{right}}(r)$, $r \in (r_1, r_2)$.

Предложение 4.1 вместе с [1; Theorem 2.6.6], [59; Предложение 5.1] сразу даёт

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. При $0 < R \leq +\infty$ радиальная функция $M: D(R) \rightarrow \mathbb{R}$ субгармоническая тогда и только тогда, когда её сужение $m := M|_{(0,R)}$ обладает одним (любым) из попарно эквивалентных свойств 2–5 Предложения 4.1 при $r_1 = 0$ и $r_2 = R$, сужение $m_0 := M|_{[0,R]}$ — возрастающая непрерывная в нуле функция, а представление (4.1) в силу непрерывности M в нуле можно записать в виде

$$M(r) = M(0) + \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt, \quad r \in [0, R), \quad (4.4)$$

где возрастающую функцию $n: [0, R) \rightarrow \mathbb{R}$ можно задать как непрерывную справа равенствами $n(r) := r(m_0)'_{\text{right}}(r) \geq 0$ во всех точках $r \in [0, R)$.

Из Предложения 4.2, используя инверсию \star , как в разделе 1.3, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Для $0 < R < +\infty$ радиальная функция $v: \mathbb{C}_\infty \setminus \overline{D}(R) \rightarrow \mathbb{R}$ субгармоническая тогда и только тогда, когда её сужение $m := v|_{(R,+\infty)}$ обладает одним (любым) из попарно эквивалентных свойств 2–5 при $r_1 = R$ и $r_2 = +\infty$, сужение $m_0 := v|_{[R,+\infty]}$ — убывающая непрерывная в точке $+\infty$ функция, а представление вида (4.4) можно записать как

$$v(r) = v(\infty) - \int_r^{+\infty} \frac{n(t)}{t} dt, \quad r \in (R, +\infty], \quad (4.5)$$

где возрастающую функцию $n: (R, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ можно задать как непрерывную слева равенствами $n(r) := r(m_0)'_{\text{left}}(r) \leq 0$ во всех точках $r \in (R, +\infty]$.

4.2. Случай $D = \mathbb{C}$. Пусть $0 < R_0 < +\infty$. Для произвольного $b \in \mathbb{R}^+$ введем класс $\text{decr}^+[R_0, +\infty; \leq b)$ всех *положительных убывающих* функций d на $[R_0, +\infty]$ при некотором $R_d \in (0, R_0)$ с ограничением

$$\int_{R_0}^{+\infty} \frac{d(t)}{t} dt \leq b. \quad (4.6)$$

Полагаем

$$\text{decr}^+[R_0, +\infty; < +\infty) := \bigcup_{b>0} \text{decr}^+[R_0, +\infty; \leq b) \quad (4.7)$$

— класс всех положительных убывающих функций в открытых окрестностях луча-отрезка $[R_0, +\infty] \subset [0, +\infty]$ с ограничением

$$\int_{R_0}^{+\infty} \frac{d(t)}{t} dt < +\infty. \quad (4.8)$$

Из (4.8) для таких функций d , в частности, следует $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(t) = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Если $d \in \text{decr}^+[R_0, +\infty; \leq b)$, $0 < R_d < R_0$, то функция

$$v(z) := \int_{|z|}^{+\infty} \frac{d(t)}{t} dt, \quad z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \overline{D}(R_d), \quad (4.9)$$

принадлежит классу $\text{sbh}_0^+(\mathbb{C} \setminus D(R_0); \leq b)$, определённого в (1.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения (4.6)–(4.9) с возрастающей функцией $n := -d$ имеет место представление (4.5) Предложения 4.3 с требуемыми в нём свойствами для функции n и ограничениями $v \stackrel{(4.6)}{\leq} b$, $\lim_{z \rightarrow \infty} v(z) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $m: [R_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — возрастающая непрерывная функция, у которой в каждой точке $r \in [R_0, +\infty)$ существует непрерывная справа правая производная $m'_{\text{right}}(r)$ и функция $r \mapsto rm'_{\text{right}}(r)$ возрастает. Пусть $f \neq 0$ — целая функция, обращающаяся в нуль на последовательности $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots}$ и удовлетворяющая неравенству $\log|f(z)| \leq m(|z|)$ для всех $z \in \mathbb{C}$ при $|z| \geq R_0$. Тогда для любого числа $b \geq 0$ найдутся

$$C := \text{const}_{R_0, b}^+, \quad \overline{C}_m := \text{const}_{R_0, b, m}^+, \quad (4.10)$$

с которыми при любых $d \in \text{decr}^+[R_0, +\infty; \leq b)$ справедливо неравенство

$$\sum_{|z_k| \geq R_0} \int_{|z_k|}^{+\infty} \frac{d(t)}{t} dt \leq \int_{R_0}^{+\infty} d(t)m'_{\text{right}}(t) dt + C\overline{C}_m - C \log|f(0)|, \quad (4.11)$$

а постоянная \overline{C}_m положительно однородная и полуаддитивная свертку по m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если не конечен интеграл

$$\int_{R_0}^{+\infty} d(t)m'_{\text{right}}(t) dt \geq 0, \quad (4.12)$$

то доказывать нечего. Поэтому предполагаем интеграл (4.12) конечным.

Для функции $m: [R_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ с её продолжением

$$m_{\leq R_0}(r) := \begin{cases} m(r) & \text{при } r \geq R_0, \\ m(R_0) & \text{при } 0 \leq r < R_0, \end{cases} \quad r \in \mathbb{R}^+,$$

на $[0, R_0]$ по Предложению 4.2 в варианте импликации $3 \Rightarrow 1$ Предложения 4.1 функция $M(z) := m_{\leq R_0}(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, — субгармоническая радиальная с мерой Рисса, определяемой, согласно (4.3) и Замечанию 4.1, равенствами

$$\frac{1}{2\pi} (\Delta M)(re^{i\theta}) d\lambda(re^{i\theta}) = \begin{cases} d(rm'_{\text{right}}(r)) \otimes \frac{1}{2\pi} d\theta \geq 0 & \text{на } \mathbb{C} \setminus \overline{D}(R_0), \\ R_0 m'_{\text{right}}(R_0) \frac{1}{2\pi} d\theta & \text{на окружности } \partial D(R_0), \\ 0 & \text{на круге } D(R_0). \end{cases} \quad (4.13)$$

По Предложению 4.4 функция v , определённая в (4.9), принадлежит классу $\text{sbh}_0^+(\mathbb{C} \setminus D(R_0); \leq b)$. Отсюда по Теореме 1 в варианте $D := \mathbb{C}$, $D_0 := D(R_0)$ в силу (1.18) получаем

$$\sum_{|z_k| \geq R_0} \int_{|z_k|}^{+\infty} \frac{d(t)}{t} dt \leq \int_{R_0}^{+\infty} \left(\int_r^{+\infty} \frac{d(t)}{t} dt \right) d(rm'_{\text{right}}(r)) + C \overline{C}_m - C \log |f(z_0)| \quad (4.14)$$

с постоянными C и $\overline{C}_m := \overline{C}_M$ из (1.16) вида (4.10) с соответствующим требуемыми свойствами. При конечности интеграла (4.12) ввиду возрастания функции $r \mapsto rm'_{\text{right}}(r)$ из соотношений

$$rm'_{\text{right}}(r) \int_r^{+\infty} \frac{d(t)}{t} dt \leq \int_r^{+\infty} \frac{d(t)}{t} tm'_{\text{right}}(t) dt = \int_r^{+\infty} d(t)m'_{\text{right}}(t) dt \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$$

следует возможность интегрирования по частям внешнего интеграла в правой части (4.14). Это позволяет заменить двойной интеграл в (4.14) на интеграл из (4.11) с допустимыми в рамках (4.10) изменениями постоянных C и \overline{C}_m .

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть выполнены условия Следствия 4.1. Тогда для произвольной функции $d \stackrel{(4.7)}{\in} \text{decr}^+[R_0, +\infty; < +\infty)$ справедлива импликация

$$\left(\int_{R_0}^{+\infty} d(t)m'_{\text{right}}(t) dt < +\infty \right) \Rightarrow \left(\sum_{|z_k| \geq R_0} \int_{|z_k|}^{+\infty} \frac{d(t)}{t} dt < +\infty \right).$$

Отметим альтернативные варианты Следствий 4.1 и 4.2. Эквивалентность $1 \Leftrightarrow 2$ Предложения 4.1 через замену переменных $x = \log r$, $r \in (r_1, r_2)$ дополняет

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Пусть $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$, $q: (\log r_1, \log r_2) \rightarrow \mathbb{R}$. Суперпозиция $q \circ \log: (r_1, r_2) \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла относительно \log тогда и только тогда, когда q — выпуклая функция.

Отсюда получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$ и $q: [x_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая возрастающая функция. Пусть $f \neq 0$ — целая функция, обращающаяся в нуль на последовательности $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots}$ и удовлетворяющая неравенству $\log|f(z)| \leq q(\log|z|)$ для всех $z \in \mathbb{C}$ при $|z| \geq e^{x_0}$. Тогда для любого числа $b \geq 0$ найдутся постоянные $C := \text{const}_{x_0, b}^+$, $\overline{C}_q := \text{const}_{x_0, b, q}^+$, с которыми для любой выпуклой убывающей функции $v: [x_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ с ограничениями $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 0$ и $v(x_0) \leq b$ справедливо неравенство

$$\sum_{|z_k| \geq e^{x_0}} v(\log|z_k|) \leq - \int_{x_0}^{+\infty} v'_{\text{left}}(x) q'_{\text{right}}(x) dx + C \overline{C}_q - C \log|f(0)|,$$

а постоянная \overline{C}_q положительно однородная и полуаддитивная сверху по q .

СЛЕДСТВИЕ 4.4. В условиях Следствия 4.3 для любой выпуклой убывающей функции $v: [x_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ при $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 0$ справедлива импликация

$$\left(\int_{x_0}^{+\infty} v'_{\text{left}}(x) q'_{\text{right}}(x) dx > -\infty \right) \Rightarrow \left(\sum_{|z_k| \geq e^{x_0}} v(\log|z_k|) < +\infty \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Поскольку монотонная функция на интервале вещественной прямой почти всюду по мере Лебега на этом интервале имеет конечную производную и локально интегрируема [57; гл. VIII, § 2], во всех утверждениях этого раздела, переходя от интегралов Римана к интегралам Лебега, односторонние производные в интегралах можно заменить на обычные производные.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Любое из Следствий 4.1–4.4 содержит в себе Теорему А с условиями Адамара (1.1), (1.2) из Введения.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Инверсия $\star_{z_0}: \mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ из (2.17), как и её обращение, сохраняют субгармоничность и выпуклость относительно \log на соответствующих множествах и преобразует возрастание относительно порядка в возрастание относительно обратного (инверсного) порядка и наоборот. Таким образом, она без труда, через замену переменных, переносит результаты этого раздела 4.2 на «проколотую» в точке z_0 расширенную плоскость $\mathbb{C}_\infty \setminus \{z_0\}$.

4.3. Случай $D = \mathbb{D}$. Пусть $0 < r_0 < 1$ всюду в этом разделе 4.3. Некоторая модификация Предложения 4.2 —

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Пусть функция $m: [r_0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ — возрастающая. Радиальная функция

$$M(z) := \begin{cases} m(|z|) & \text{при } r_0 \leq |z| < 1, \\ m(r_0) & \text{при } 0 \leq |z| < r_0, \end{cases} \quad z \in \mathbb{D}, \quad (4.15)$$

субгармоническая в \mathbb{D} тогда и только тогда, когда сужение функции m на $(r_0, 1)$, обозначаемое также через m , обладает одним (любым) из попарно эквивалентных свойств 2–5 Предложения 4.1 при $r_1 = r_0$ и $r_2 = 1$ и, кроме того, исходная функция m непрерывна справа в точке r_0 .

При выполнении этих условий существуют $m'_{\text{right}}(r)$ при всех $r \in [r_0, 1)$, а представления вида (4.1), (4.4) могут быть записаны в форме

$$M(r) = m(r_0) + \int_{r_0}^{\max\{r_0, r\}} \frac{n(t)}{t} dt, \quad r \in [0, 1), \quad (4.16)$$

где возрастающую функцию $n: [r_0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ можно задать и как непрерывную справа равенствами $n(r) := r m'_{\text{right}}(r) \geq 0$ во всех точках $r \in [r_0, 1)$.

Плотность меры Рисса субгармонической функции (4.15) можно задать, по Замечанию 4.1, равенствами

$$\frac{1}{2\pi} (\Delta M)(re^{i\theta}) d\lambda(re^{i\theta}) = \begin{cases} d(rm'_{\text{right}}(r)) \otimes \frac{1}{2\pi} d\theta \geq 0 & \text{на кольце } A(r_0, 1), \\ r_0 m'_{\text{right}}(r_0) \frac{1}{2\pi} d\theta & \text{на окружности } \partial D(r_0), \\ 0 & \text{на круге } D(r_0). \end{cases} \quad (4.17)$$

Для $b \in \mathbb{R}^+$ введем класс $\text{decr}^+[r_0, 1; \leq b)$ положительных убывающих функций $d: [r_d, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ с некоторым $r_d \in (0, r_0)$ и с ограничением

$$\int_{r_0}^1 \frac{d(t)}{t} dt \leq b. \quad (4.18)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. Если $d \in \text{decr}^+[r_0, 1; \leq b)$ с $0 < r_d < r_0$, то функция

$$v(z) := \int_{|z|}^1 \frac{d(t)}{t} dt, \quad z \in \mathbb{D} \setminus \overline{D}(r_d), \quad (4.19)$$

принадлежит классу $\text{sbh}_0^+(\mathbb{D} \setminus D(r_0); \leq b)$, определённого в (1.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим функцию d нулевыми значениями на весь отрезок-луч $[1, +\infty]$, сохраняя для новой функции на $[r_d, +\infty]$ то же обозначение $d: [r_d, +\infty] \rightarrow [0, +\infty)$. Ввиду (4.18), очевидно, справедливо ограничение (4.6) с $R_0 = r_0$. Следовательно, продолженная функция d из класса $\text{decr}^+[r_0, +\infty; \leq b)$. Тогда по Предложению 4.4 функция v , определённая как в (4.9) с $R_d = r_d$ принадлежит классу $\text{sbh}_0^+(\mathbb{C} \setminus D(r_0); \leq b)$, а её сужение на $\mathbb{D} \setminus D(r_0)$ определяется как в (4.19) и $\lim_{1 > |z| \rightarrow 1} v(z) = 0$, что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть $m: [r_0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ — возрастающая непрерывная функция, у которой в каждой точке $r \in [r_0, 1)$ существует непрерывная справа правая производная $m'_{\text{right}}(r)$ и функция $r \mapsto rm'_{\text{right}}(r)$ — возрастающая. Пусть $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$ — ненулевая функция, обращающаяся в нуль на последовательности $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots}$, и неравенство $\log|f(z)| \leq m(|z|)$ выполнено для всех $z \in \mathbb{D}$ при $|z| \geq r_0$. Тогда для любого числа $b \geq 0$ найдутся постоянные

$$C := \text{const}_{r_0, b}^+, \quad \overline{C}_m := \text{const}_{r_0, b, m}^+, \quad (4.20)$$

с которыми для любой функции $d \in \text{decr}^+[r_0, 1; \leq b)$ справедливо неравенство

$$\sum_{r_0 \leq |z_k| < 1} \int_{|z_k|}^1 \frac{d(t)}{t} dt \leq \int_{r_0}^1 d(t) m'_{\text{right}}(t) dt + C \overline{C}_m - C \log|f(0)|, \quad (4.21)$$

а постоянная \overline{C}_m положительно однородная и полуаддитивная сверху по m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если не конечен интеграл

$$\int_{r_0}^1 d(t)m'_{\text{right}}(t) dt \geq 0, \quad (4.22)$$

то доказывать нечего. Поэтому предполагаем интеграл (4.22) конечным.

Функция M , определённая в Предложении 4.6 в виде (4.15) субгармоническая радиальная на \mathbb{D} с мерой Рисса (4.17).

По Предложению 4.7 функция v , определённая в (4.19), принадлежит классу $\text{sbh}_0^+(\mathbb{D} \setminus D(r_0); \leq b)$. Отсюда по Теореме 1 в варианте $D := \mathbb{D}$, $D_0 := D(r_0)$ в силу (1.18) получаем

$$\sum_{|z_k| \geq r_0} \int_{|z_k|}^1 \frac{d(t)}{t} dt \leq \int_{r_0}^1 \left(\int_r^1 \frac{d(t)}{t} dt \right) d(rm'_{\text{right}}(r)) + C\overline{C}_m - C \log|f(z_0)| \quad (4.23)$$

с постоянными C и $\overline{C}_m := \overline{C}_M$ из (1.16) вида (4.10). При конечности интеграла (4.22) ввиду возрастания функции $r \mapsto rm'_{\text{right}}(r)$ из соотношений

$$rm'_{\text{right}}(r) \int_r^1 \frac{d(t)}{t} dt \leq \int_r^1 \frac{d(t)}{t} tm'_{\text{right}}(t) dt = \int_r^1 d(t)m'_{\text{right}}(t) dt \xrightarrow{1 > r \rightarrow 1} 0$$

следует возможность интегрирования по частям внешнего интеграла в правой части (4.14). Это позволяет заменить двойной интеграл в (4.23) на интеграл из (4.21) с допустимыми в рамках (4.20) изменениями постоянных C и \overline{C}_m .

СЛЕДСТВИЕ 4.6. В условиях Следствия 4.5 для любой положительной убывающей функции d в открытой окрестности интервала $[r_0, 1) \subset (0, +\infty)$ справедлива импликация

$$\left(\int_{r_0}^1 d(t)m'_{\text{left}}(t) dt < +\infty \right) \Rightarrow \left(\sum_{r_0 \leq |z_k| < 1} \int_{|z_k|}^1 \frac{d(t)}{t} dt < +\infty \right).$$

Отметим также и альтернативные варианты Следствий 4.5 и 4.6, основанные на эквивалентности $1 \Leftrightarrow 2$ Предложения 4.1, замене переменных $x = \log r$ при $r \in (r_0, 1)$, $x \in (\log r_0, 0)$ и Предложении 4.5.

СЛЕДСТВИЕ 4.7. Пусть $0 > x_0 \in \mathbb{R}$ и $q: [x_0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая возрастающая функция. Пусть $0 \neq f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, f обращается в нуль на $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots}$ и удовлетворяет неравенству $\log|f(z)| \leq q(\log|z|)$ для всех $z \in \mathbb{D}$ при $e^{x_0} \leq |z| < 1$. Тогда для любого числа $b \geq 0$ найдутся постоянные $C := \text{const}_{x_0, b}^+$, $\overline{C}_q := \text{const}_{x_0, b, q}^+$

с которыми для любой выпуклой убывающей функции $v: [x_0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ с ограничениями $\lim_{0 > x \rightarrow 0} v(x) = 0$ и $v(x_0) \leq b$ справедливо неравенство

$$\sum_{e^{x_0} \leq |z_k| < 1} v(\log|z_k|) \leq - \int_{x_0}^1 v'_{\text{left}}(x) q'_{\text{right}}(x) dx + C\overline{C}_q - C \log|f(0)|,$$

а постоянная \overline{C}_q положительно однородная и полуаддитивная сверху по q .

СЛЕДСТВИЕ 4.8. В условиях Следствия 4.7 для любой выпуклой убывающей функции $v: [x_0, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ с $\lim_{0 > x \rightarrow 0} v(x) = 0$ истинна импликация

$$\left(\int_{x_0}^0 v'_{\text{left}}(x) q'_{\text{right}}(t) dt > -\infty \right) \implies \left(\sum_{e^{x_0} \leq |z_k| < 1} v(\log |z_k|) < +\infty \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Совпадает с Замечанием 4.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Любое из Следствий 4.5–4.8 содержит в себе Теорему В с условиями Бляшке (1.3), (1.4) из Введения.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Гомотетия с центром в нуле и инверсия \star из Введения сохраняют субгармоничность и выпуклость относительно \log . Эти отображения для любого $R \in (0, +\infty)$ без труда переносят результаты этого раздела 4.3 на каждый из случаев $D = D(R)$ и $\mathbb{C}_\infty \setminus D(R)$.

4.4. Случай $D = A(r_1, r_2)$ — кольцо. Всюду в этом разделе

$$0 \leq r_1 < r' < r'' < r_2 \leq +\infty. \quad (4.24)$$

Утверждения этого раздела легко получаются простой интеграцией результатов разделов 4.2–4.3 с использованием, когда необходимо, замен переменных, в частности инверсии. Поэтому доказательства и обоснования опускаем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. Пусть функция $m: (r_1, r'] \cup [r'', r_2) \rightarrow \mathbb{R}$

- 1) убывающая на $(r_1, r']$, обладает одним (любым) из попарно эквивалентных свойств 2–5 Предложения 4.1 при $r_2 = r'$, непрерывна слева в точке r' ,
- 2) возрастающая на $[r'', r_2)$, обладает одним (любым) из попарно эквивалентных свойств 2–5 Предложения 4.1 с $r_1 = r''$, непрерывна справа в r'' .

Предположим, что существует число⁸

$$m_0 \in m((r_1, r']) \cap m([r'', r_2)) \neq \emptyset. \quad (4.25)$$

Тогда, уменьшая r' или/и увеличивая r'' в рамках условия (4.24), легко добиться того, что $m(r') = m(r'') = m_0$, для исходной функции m , доопределённой значениями m на (r', r'') , существуют $m'_{\text{left}}(r)$ и $m'_{\text{right}}(r)$ при всех $r \in (r_1, r_2)$. При этом радиальная функция

$$M(z) := \begin{cases} m(|z|) & \text{при } |z| \in (r_1, r'] \cup [r'', r_2), \\ m_0 & \text{при } r' < |z| < r'', \end{cases} \quad x \in A(r_1, r_2), \quad (4.26)$$

— субгармоническая, представление (4.1) для любого $r_0 \in (r', r'')$ имеет вид

$$M(r) = m_0 + \int_{r_0}^r \frac{n_0(t)}{t} dt, \quad r \in (r_1, r_2),$$

⁸Число m_0 , удовлетворяющее условию (4.25), всегда существует, если $\lim_{r_1 < r \rightarrow r_1} m(r) = \lim_{r_2 > r \rightarrow r_2} m(r) = +\infty$. В противном случае этого можно добиться, добавив число к одной из «ветвей» функции m на $(r_1, r']$ или на $[r'', r_2)$. Здесь такое изменение функции m , равно как и уменьшение r' и увеличение r'' в рамках условия (4.24), не играет никакой роли.

где возрастающую функцию $p_0: (r_1, r_2) \rightarrow \mathbb{R}$ можно задать и как непрерывную справа (или слева) равенствами $p_0(r) := r m'_{\text{right}}(r)$ (соответственно $p_0(r) := r m'_{\text{left}}(r)$) во всех точках $r \in (r_1, r_2)$.

Плотность меры Рисса субгармонической функции (4.26) можно задать, по Замечанию 4.1, равенствами

$$\frac{1}{2\pi} (\Delta M)(re^{i\theta}) d\lambda(re^{i\theta}) = \begin{cases} d(rm'_{\text{left}}(r)) \otimes \frac{1}{2\pi} d\theta \geq 0 & \text{на кольце } A(r_1, r'), \\ r' m'_{\text{left}}(r') \frac{1}{2\pi} d\theta & \text{на окружности } \partial D(r'), \\ 0 & \text{на кольце } A(r', r''), \\ r'' m'_{\text{right}}(r'') \frac{1}{2\pi} d\theta & \text{на окружности } \partial D(r''), \\ d(rm'_{\text{right}}(r)) \otimes \frac{1}{2\pi} d\theta \geq 0 & \text{на кольце } A(r'', r_2). \end{cases}$$

Для пары чисел $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^+$ введем класс $\text{monot}^+(r_1, r', r'', r_2; \leq b)$ положительных функций $d: (r_1, r'_d] \cup [r''_d, r_2) \rightarrow \mathbb{R}$ с $r' < r'_d \leq r''_d < r''$, возрастающих на $(r_1, r'_d]$ и убывающих на $[r''_d, r_2)$, с ограничениями

$$\int_{r_1}^{r'} \frac{d(t)}{t} dt \leq b_1, \quad \int_{r''}^{r_2} \frac{d(t)}{t} dt \leq b_2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.9. Если $d \in \text{monot}^+(r_1, r', r'', r_2; \leq b)$, то функция

$$v(z) := \begin{cases} \int_{r_1}^{|z|} d(t) \frac{dt}{t} & \text{при } r_1 < |z| < r'_d, \\ \int_{|z|}^{r_2} d(t) \frac{dt}{t} & \text{при } r''_d < |z| < r_2, \end{cases} \quad z \in A(r_1, r_2) \setminus A(r', r''), \quad (4.27)$$

принадлежит классу $\text{sbh}_0^+(A(r_1, r_2) \setminus A(r', r''); \leq b)$, определённого в (1.10).

СЛЕДСТВИЕ 4.9. Пусть m — функция из Предложения 4.8, а ненулевая функция $f \in \text{Hol}(A(r_1, r_2))$ обращается в нуль на последовательности точек $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots}$ и $\log|f(z)| \leq m(|z|)$ при всех $z \in A(r_1, r_2) \setminus A(r', r'')$. Тогда для любых пар чисел $b_1, b_2 \geq 0$ и числа $z_0 \in A(r', r'')$ найдутся постоянные⁹

$$C := \text{const}_{z_0, b_1, b_2}^+, \quad \overline{C}_m := \text{const}_{z_0, b_1, b_2, m}^+, \quad (4.28)$$

с которыми для любой функции $d \in \text{monot}^+(r_1, r', r'', r_2; \leq b)$ имеем

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{r_1 < |z_k| \leq r'} \int_{r_1}^{|z_k|} + \sum_{r'' \leq |z_k| < r_2} \int_{|z_k|}^{r_2} \right) \frac{d(t)}{t} dt \\ & \leq - \int_{r_1}^{r'} d(t) m'_{\text{left}}(t) dt + \int_{r''}^{r_2} d(t) m'_{\text{right}}(t) dt + C \overline{C}_m - C \log|f(z_0)|, \end{aligned}$$

а постоянная \overline{C}_m положительно однородная и полуаддитивная сверху по m .

⁹Зависимость этих постоянных от величин из (4.24) не помечена.

СЛЕДСТВИЕ 4.10. В условиях Следствия 4.9 для любого $b \in \mathbb{R}^+$ и любой функции $d \in \text{monot}^+(r_1, r', r'', r_2; \leq b)$ справедлива импликация

$$\left(\int_{r_1}^{r'} d(t) m'_{\text{left}}(t) dt + \int_{r''}^{r_2} d(t) m'_{\text{right}}(t) dt < +\infty \right) \\ \Rightarrow \left(\sum_{r_1 < |z_k| \leq r'} \int_{r_1}^{|z_k|} \frac{d(t)}{t} dt + \sum_{r'' \leq |z_k| < r_2} \int_{|z_k|}^{r_2} \frac{d(t)}{t} dt < +\infty \right).$$

Отметим также и альтернативные варианты Следствий 4.9 и 4.10, основанные на эквивалентности $1 \Leftrightarrow 2$ Предложения 4.1, замене переменных $x = \log r$ при $r \in (r_1, r') \cup [r'', r_2)$ и $x \in (x_1, x'] \cup [x'', x_2)$ с

$$-\infty \leq x_1 := \log r_1 < x' := \log r' < x'' := \log r'' < x_2 := \log r_2 \leq +\infty \quad (4.29)$$

и Предложении 4.5. В обозначениях (4.29) имеет место

СЛЕДСТВИЕ 4.11. Пусть $q: (x_1, x'] \cup [x'', x_2) \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция, убывающая на $(x_1, x']$ и возрастающая на $[x'', x_2)$, $q((x_1, x']) \cap q([x'', x_2)) \neq \emptyset$. Пусть ненулевая функция $f \in \text{Hol}(A(e^{x_1}, e^{x_2}))$ обращается в нуль на $Z = \{z_k\}_{k=1,2,\dots}$ и $\log|f(z)| \leq q(\log|z|)$ при всех $z \in A(e^{x_1}, e^{x_2}) \setminus A(e^{x'}, e^{x''})$. Тогда для любой пары чисел $b_1, b_2 \geq 0$ и числа $z_0 \in A(e^{x'}, e^{x''})$ найдутся постоянные (4.28) с q и \overline{C}_q вместо t и \overline{C}_m , зависящие от чисел (4.29), с которыми для любой выпуклой функции $v: (x_1, x'] \cup [x'', x_2) \rightarrow \mathbb{R}$, возрастающей на $(x_1, x']$ и убывающей на $[x'', x_2)$ с ограничениями $\lim_{x_1 < x \rightarrow x_1} v(x) = \lim_{x_2 > x \rightarrow x_2} v(x) = 0$ и $v(x') \leq b_1$, $v(x'') \leq b_2$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{e^{x_1} < |z_k| \leq e^{x'}} + \sum_{e^{x''} \leq |z_k| < e^{x_2}} \right) v(\log|z_k|) \\ \leq - \int_{x_1}^{x'} v'_{\text{right}}(x) q'_{\text{left}}(x) dx - \int_{x''}^{x_2} v'_{\text{left}}(x) q'_{\text{right}}(x) dx + C \overline{C}_m - C \log|f(z_0)|,$$

а постоянная \overline{C}_q положительно однородная и полуаддитивная сверху по q .

СЛЕДСТВИЕ 4.12. В условиях Следствия 4.11 для любой выпуклой функции $v: (x_1, x'] \cup [x'', x_2) \rightarrow \mathbb{R}$, возрастающей на $(x_1, x']$ и убывающей на $[x'', x_2)$ с ограничениями $\lim_{x_1 < x \rightarrow x_1} v(x) = \lim_{x_2 > x \rightarrow x_2} v(x) = 0$ и $v(x') \leq b_1$, $v(x'') \leq b_2$ истинна импликация

$$\left(\int_{x_1}^{x'} v'_{\text{right}}(x) q'_{\text{left}}(x) dx + \int_{x''}^{x_2} v'_{\text{left}}(x) q'_{\text{right}}(x) dx > -\infty \right) \\ \Rightarrow \left(\left(\sum_{e^{x_1} < |z_k| \leq e^{x'}} + \sum_{e^{x''} \leq |z_k| < e^{x_2}} \right) v(\log|z_k|) < +\infty \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. Совпадает с Замечанием 4.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.9. Основная Теорема, Теорема 1 и Следствие 1.1 позволяют использовать радиальные тестовые функции (4.9), (4.19), (4.27) соответственно для плоскости \mathbb{C} , круга \mathbb{D} и кольца, а также их альтернативные версии из Следствий 4.3, 4.7, 4.11 вида $v \circ \log$ с выпуклой функцией v не только для радиальных мажорант M , но и для произвольных (δ^-) субгармонических мажорант M в таких областях.

§ 5. Тестовые функции

Уже по Теореме В из п. 1.1 Введения видно, что как самую элементарную тестовую функцию можно рассматривать функцию Грина $g_{D'}(\cdot, z_0)$ для произвольной подобласти $D' \subset D$. Аналогично, в исследованиях Коренблюма–Сейпа распределения нулей в равномерных пространствах Бергмана в круге \mathbb{D} роль тестовых функций играли функции Грина (с полюсом в нуле) специальных конечных объединений открытых кругов из \mathbb{D} , касающихся окружности $\partial\mathbb{D}$ изнутри в конечном числе точек и содержащих в себе некоторый фиксированный круг $D(r_0) \Subset \mathbb{D}$ (см. [15; 4], [37; § 5]).

Здесь мы укажем способы конструирования широких классов тестовых функций, далёких от радиальных. Очень полезной для этого будет установленная Дж. Гардинером с дополнениями М. Климека (см. также Ю. Риихентаус [66])

ТЕОРЕМА G–K [7; Theorem 2.6.6]. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}_\infty$ — открытое множество, $g: \mathcal{O} \rightarrow (0, +\infty)$. Если выполнено одно из трёх условий

- (i) $s \in \text{har}(\mathcal{O})$, $g \in \text{har}(\mathcal{O})$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция;
 - (ii) $s \in \text{sbh}(\mathcal{O})$, $g \in \text{har}(\mathcal{O})$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая возрастающая функция с интерпретацией $f(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;
 - (iii) $s \in \text{sbh}^+(\mathcal{O})$, $-g \in \text{sbh}(\mathcal{O})$, $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ — выпуклая функция с $f(0) = 0$;
- то $g f(s/g) \in \text{sbh}(\mathcal{O})$.

Ниже в подразделе 6.1 будет дано новое доказательство этого результата — более сложное, чем оригинальное, но позволяющее явно выписывать меры Рисса субгармонических функций $g f(s/g) \in \text{sbh}(\mathcal{O})$ из заключения Теоремы G–K.

Отметим также очень давно известные частные случаи Теоремы G–K, соответствующие случаю $g = 1$ — тождественная единица.

ТЕОРЕМА C [6; I.П.9]. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}_\infty$ открытое, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Если выполнено одно из двух условий

- (i) функция $s: \mathcal{O} \rightarrow (a, b)$ из пространства $\text{har}(\mathcal{O})$;
- (ii) $s: \mathcal{O} \rightarrow [a, b)$, $s \in \text{sbh}(\mathcal{O})$ и F — возрастающая функция, доопределенная в точке a по непрерывности $F(a) := \lim_{a < x \rightarrow a} F(x)$;

то суперпозиция $F \circ s \in \text{sbh}(\mathcal{O})$.

5.1. Построение тестовых функций. Пользуемся различными версиями Теоремы G–K. При этом, как правило, роль функций g , а часто и s , будут играть именно функции Грина с одним и тем же фиксированным полюсом $z_0 \in D_0 \Subset D$ различных областей, включающих в себя D_0 . Поэтому точку z_0 как полюс в обозначениях функций Грина зачастую не указываем.

5.1.1. На основе гармонических функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть D — регулярная область с функцией Грина g_D , $s \in \text{har}(D \setminus D_0)$, а $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ — выпуклая функция, ограниченная на образе $(s/g_D)(D \setminus D_0)$. Тогда $g_D f(s/g_D) \stackrel{(1.13)}{\in} \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0)$ — тестовая функция. В качестве функции s можно выбирать, например, $s = 1$ или функцию Грина $g_{\hat{D}}$ произвольной области \hat{D} с неполярной границей, включающей в себя область D . В частности, в последнем случае по принципу подчинения [1; Corollary 4.4.5] для функций Грина (с одинаковыми полюсами) при $D \subset \hat{D}$ всегда

$$\frac{g_{\hat{D}}}{g_D} \geq 1 \quad \text{на } D. \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По п. (i) Теоремы G–K и в силу положительности f имеем $g_D f(s/g_D) \in \text{sbh}^+(D \setminus D_0)$. При этом ввиду ограниченности функции f на образе $(s/g_D)(D \setminus D_0)$ и стремления к нулю функции Грина g_D при приближении к границе ∂D видим, что $g_D f(s/g_D)$ — тестовая функция.

ПРИМЕР 5.1. Рассмотрим регулярную область $\hat{D} \supset D$, число $p > 0$, выпуклую убывающую положительную на \mathbb{R} функцию

$$f_p(x) := \begin{cases} x^{-p} & \text{при } x \geq 1, \\ -p(x-1) + 1 & \text{при } x \leq 1, \end{cases}$$

а также выпуклую убывающую функцию $x \mapsto e^{-px}$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда по Предложению 5.1 согласно (5.1) две функции

$$g_D \left(\frac{g_{\hat{D}}}{g_D} \right)^{-p} = g_D \cdot g_D^p \cdot g_{\hat{D}}^{-p} \stackrel{(5.1)}{\leq} g_D, \quad g_D \exp(-p(g_{\hat{D}}/g_D)) \leq g_D \quad (5.2)$$

— примеры нетривиальных тестовых функций класса $\text{sbh}_0^+(D \setminus \{z_0\})$.

5.1.2. На основе гармонической и субгармонической функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть функция $g \in \text{har}(D \setminus D_0)$ строго положительна и ограничена на $D \setminus D_0$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ — выпуклая возрастающая функция с интерпретацией $f(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Пусть $s \in \text{sbh}(D \setminus D_0)$ и выполнено одно из условий:

(а) для некоторого $x_0 \in [-\infty, +\infty)$ имеем $f(x_0) = 0$ и существует предел

$$\lim_{z \rightarrow \partial D} \frac{s(z)}{g(z)} \stackrel{(2.16)}{=} x_0 \quad (5.3)$$

(б) образ $(s/g)(D \setminus D_0)$ ограничен и $\lim_{z \rightarrow \partial D} g(z) = 0$.

Тогда $g f(s/g) \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0)$.

Доказательство опускаем, поскольку оно легко следует из п. (ii) Теоремы G–K по аналогии с доказательством Предложения 5.1 с той лишь разницей, что стремление к нулю для $g f(s/g)$ при приближении границы ∂D достигается в случае (а) за счёт условия (5.3) в сочетании с $f(x_0) = 0$, а в случае (б) за счёт стремления $g(z)$ к нулю при $z \rightarrow \partial D$ и ограниченности образа $(f(s/g))(D \setminus D_0)$.

ПРИМЕР 5.2 (скорее частный случай Предложения 5.2). Пусть \widehat{D} — область и $D \Subset \widehat{D}$, $g \in \text{har}(\widehat{D} \setminus D_0)$ и $g > 0$ на $D \setminus D_0$, к примеру, $g = g_{\widehat{D}}$ — функция Грина области \widehat{D} . В условиях Предложения 5.2(a) замена условия (5.3) на $f(0) = 0$ и $\lim_{z \rightarrow \partial D} s(z) = 0$ даёт тот же результат.

Другой вариант — выбор в п. (b) в качестве функции s продолженной функции Грина $g_{D'}(\cdot, z_0)$ для подобласти $D' \subset D$ с неполярной границей, а в роли g — функции Грина $g_D(\cdot, z_0)$. В этом случае $0 \leq g_{D'}/g_D \leq 1$ на $D \setminus \{z_0\}$.

5.1.3. На основе супер- и субгармонической функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть функция $g > 0$ на $D \setminus D_0$, $g \in -\text{sbh}(D \setminus D_0)$, т. е. g супергармоническая, $s \in \text{sbh}^+(D \setminus D_0)$, $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ — выпуклая возрастающая функция с условием $f(0) = 0$ и выполнено одно из трех условий

- (a) $\lim_{z \rightarrow \partial D} g(z) \stackrel{(2.16)}{=} 0$ и образ $(s/g)(D \setminus D_0)$ ограничен;
- (b) выполнено соотношение (5.3) и функция g ограничена на $D \setminus D_0$;
- (c) $s \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0)$, $\liminf_{z \rightarrow \partial D} g(z) > 0$ и g ограничена сверху на $D \setminus D_0$.

Тогда $g f(s/g) \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0)$ — тестовая функция.

Доказательство также опускаем, поскольку рассуждения для варианта (a) идентичны доказательству Предложения 5.1, а для варианта (b) — доказательству Предложения 5.2. Вариант же (c) — частный случай варианта (b).

ПРИМЕР 5.3. Пусть подобласть $D' \subset D$ регулярная, $z_0 \in D_0 \Subset D$, $s := g_{D'} := g_{D'}(z, z_0)$ — продолженная нулём на $\mathbb{C}_\infty \setminus D'$ функция Грина для D' с полюсом z_0 , $g = 1$. Тогда для f из Предложения 5.3(c) функция $f \circ g_{D'}$ тестовая из класса $\text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b)$, где $b := \sup_{\partial D_0} (f \circ g_{D'})$.

ПРИМЕР 5.4. Пусть D — регулярная область в \mathbb{C}_∞ с функцией Грина $g_D = g_D(\cdot, z_0)$. Тогда для положительной функции $g := \log(1 + g_D)$, очевидно, выполнено условие (a) Предложения 5.3 и вне точки $z_0 \in D_0$ функция $-\log(1 + g_D) \in \text{sbh}(D \setminus \{z_0\})$ по Предложению C(i) как суперпозиция выпуклой функции $-\log$ и гармонической в $D \setminus \{z_0\}$ функции $1 + g_D$, т. е. для любой функции Грина $g_D(\cdot, z_0)$ функция $\log(1 + g_D)$ супергармонична. Следовательно, из Предложения 5.3 для любой функции $s \in \text{sbh}^+(D \setminus D_0)$ при ограниченности образа $(s/\log(1 + g_D))(D \setminus D_0)$ для выпуклой возрастающей функции $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ с $f(0) = 0$ функция

$$f\left(\frac{s}{\log(1 + g_D)}\right) \log(1 + g_D) \quad \text{— тестовая функция из } \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0). \quad (5.4)$$

5.1.4. Гиперболический радиус и тестовые функции. Мотивировано консультациями Ф. Г. Авхадиева [60; 3.1], [61]. Пусть $D \subset \mathbb{C}_\infty$ — область гиперболического типа, т. е. область, имеющая не менее трёх граничных точек на \mathbb{C}_∞ . Тогда в любой точке $z \in D$ определен гиперболический, или конформный в случае односвязности $D \not\cong \infty$, радиус $R(z, D) = \frac{1}{\lambda_D(z)}$, $z \in D$, где λ_D — коэффициент метрики Пуанкаре с гауссовой кривизной $= -4$. Известно, что

гиперболический радиус $R(\cdot, D)$ строго положителен на D и в случае, когда $\infty \notin \partial D$, обладает свойством $\lim_{z \rightarrow \partial D} R(z, D) \stackrel{(a)}{=} 0$.

Далее, как обычно, ∇ — оператор «набла», или Гамильтона, реализующий градиент; $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ — оператор Лапласа.

Гиперболический радиус удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$R\Delta R = |\nabla R|^2 - 4, \quad \nabla R \text{ — градиент } R, \quad (5.5)$$

которое ввиду легко устанавливаемого тождества $\Delta(R^2) = 2R\Delta R + 2|\nabla R|^2$ (см. неоднократно употребляемое ниже тождество (6.2)) может быть записано и в иных эквивалентных (5.5) формах:

$$4R\Delta R = \Delta(R^2) - 8 \iff \Delta(R^2) = 4|\nabla R|^2 - 8.$$

По Теореме Лёвнера [60; Theorem 3.23] собственная подобласть в \mathbb{C} выпукла тогда и только тогда, когда

$$\sup_{z \in D} |\nabla R(z, D)| \leq 2.$$

Таким образом, ввиду (5.5) и по Предложению 5.3 имеем

ПРИМЕР 5.5. Для собственной выпуклой подобласти $D \subset \mathbb{C}$ с $\infty \notin \partial D$ её *конформный радиус R супергармоничен* и для произвольной $s \in \text{sbh}^+(D \setminus D_0)$ при ограниченности образа $(s/R)(D \setminus D_0)$ с выпуклой возрастающей функцией $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ с $f(0) = 0$ функция $Rf(s/R)$ тестовая.

Другой подобный (5.4) пример с участием гиперболического радиуса R области D возможен, когда а priori выполнена верхняя оценка

$$\sup_{z \in D} (\Delta R)(z) \leq A < +\infty \quad \text{и} \quad A \leq 4N \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

По сообщению Ф. Г. Авхадиева достаточное условие для этого — граница ∂D класса C^2 с гёльдеровой кривизной, но можно допускать и угловые точки с нетупым углом, т. е. локально выпуклые в окрестности угловой точки.

ПРИМЕР 5.6. Пусть выполнено условие (5.6). Тогда

$$\begin{aligned} \Delta \log(1 + NR) &= \nabla \cdot \nabla \log(1 + NR) = \nabla \cdot \frac{\nabla(1 + NR)}{1 + NR} \\ &= \frac{(1 + NR)\nabla \cdot \nabla(1 + NR) - \nabla(1 + NR) \cdot \nabla(1 + NR)}{(1 + NR)^2} \\ &= \frac{(1 + NR)\Delta(NR) - |\nabla NR|^2}{(1 + NR)^2} = \frac{N\Delta R + N^2 R\Delta R - N^2 |\nabla R|^2}{(1 + NR)^2} \\ &\stackrel{(5.5)}{=} \frac{N\Delta R - 4N^2}{(1 + NR)^2} = N \frac{\Delta R - 4N}{(1 + NR)^2} \stackrel{(5.5)}{\leq} N \frac{A - 4N}{(1 + NR)^2} \leq 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Таким образом, в условиях (5.6) функция $\log(1 + NR)$ супергармоническая и при $\infty \notin \partial D$ по Предложению 5.3 для любой функции $s \in \text{sbh}^+(D \setminus D_0)$ при ограниченности образа $(s/\log(1 + NR))(D \setminus D_0)$ для выпуклой возрастающей функции $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ с $f(0) = 0$ функция

$$f\left(\frac{s}{\log(1 + NR)}\right) \log(1 + NR) \quad \text{— тестовая функция из } \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0). \quad (5.8)$$

5.1.5. Функции расстояния и тестовые функции. В тех случаях, когда тестовые функции в данном § 6 построены с участием функций Грина или гиперболического радиуса в части или во всей тестовой функции, как правило, при некоторых ограничениях на область D , можно перейти от этой тестовой функции к эквивалентной в определенном смысле функции, зависящей от расстояния до границы [14]–[15] или её части (см. и ср. с [25]–[31]).

Г. С участием функции Грина. Отметим некоторые известные факты.

1g. Если граница области D состоит из конечного числа отделенных друг от друга простых замкнутых кривых класса C^2 на \mathbb{C} , то [62], [63; (2.8)]

$$g_D(z, z_0) \leq B_0 \operatorname{dist}(z, \partial D), \quad z \in D \setminus D_0, \quad z_0 \in D_0, \quad (5.9a)$$

$$b_0 \operatorname{dist}(z, \partial D) \leq g_D(z, z_0), \quad z \in D \setminus D_0, \quad z_0 \in D_0 \quad (5.9b)$$

для некоторого $D_0 \Subset D$, где $0 < b_0 \leq 1 \leq B_0 < +\infty$ — постоянные, зависящие только от z_0, D_0, D .

2g. Если область $D \ni \infty = z_0$ с неполярной границей представима в виде объединения открытых кругов радиуса не меньше некоторого фиксированного строго положительного числа, то для некоторой подобласти $D_0 \Subset D$ с $z_0 = \infty \in D_0$ справедлива оценка снизу (5.9b) [30; Lemma 1, Remark 2].

3g. Оценка сверху (5.9a) также справедлива, если $D \Subset \mathbb{C}$ или $D \ni \infty$, т. е. $\infty \notin \partial D$, — область Ляпунова–Дини, т. е. с границей класса C^1 , на которой для внутренних нормалей $\vec{n}_{\text{inner}}(z)$, $z \in \partial D$, в любых точках $z_1, z_2 \in \partial D$ выполнено неравенство $|\vec{n}_{\text{inner}}(z_1) - \vec{n}_{\text{inner}}(z_2)| \leq a(|z_1 - z_2|)$, где непрерывная функция $a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ с $a(0) = 0$ возрастает, функция $t \mapsto a(t)/t$ на $(0, +\infty)$ убывает и $\int_0^1 (a(t)/t) dt < +\infty$. Этот результат в [64; Theorem 2.3]

установлен для областей в \mathbb{R}^3 , как и предшествующий такой же факт в статье М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева для частного случая областей Ляпунова [65], но их доказательства дословно переносятся на области в \mathbb{C} .

Эти оценки позволяют при использовании в Основной теореме, Теореме 1 и Следствии 1.1 тестовых функций из Предложения 5.1, примеров (5.2) и Примеров 5.2 и 5.4 заменять всю или часть тестовой функции, содержащей функции Грина g_D и/или $g_{\hat{D}}$ с $\hat{D} \supset D$ на функцию от расстояния до границы ∂D . Если функция-мажоранта зависит от расстояния только до части $E \subset \partial D$ границы области D как в [25]–[29], то область $\hat{D} \supset D$ в тестовых функциях с участием функции Грина $g_{\hat{D}}$ выше, по-видимому, целесообразнее всего выбирать как объединение области D со всеми кругами фиксированного радиуса с центрами на дополнении $\partial D \setminus E$ или же со всеми кругами вида $D(z, r(z))$, где z пробегает дополнение $\partial D \setminus E$, а $r(z) = \operatorname{dist}(z, E)$ (см. и.ср. с применениями в пп. 6.2.3DLE ниже). Так, из Предложения 5.1 в его условиях и ограничениях при $s = g_{\hat{D}}$ и регулярной области $\hat{D} \supset D$ с учётом неравенства (5.1) сразу вытекают

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Если $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ — убывающая выпуклая функция с непрерывной правой производной¹⁰ в точке 1, то для тестовой, — по

¹⁰Это условие позволяет легко продолжить функцию f как выпуклую убывающую на \mathbb{R} .

Предложению 5.1, — функции $g_D f(g_{\widehat{D}}/g_D)$ при условиях 1g или 2g–3g на обе области $D \subset \widehat{D}$, обеспечивающих выполнение двусторонних оценок вида (5.9) для обеих областей D и \widehat{D} , для некоторой подобласти $D_0 \Subset D$ с $z_0 \in D_0$ на $D \setminus D_0$ с некоторыми постоянными $0 < a_0 \leq 1 \leq A_0 < +\infty$, зависящими только от z_0, D_0, D, \widehat{D} , справедливы оценки

$$\begin{aligned} a_0 \operatorname{dist}(\cdot, \partial D) f \left(A_0 \frac{\operatorname{dist}(\cdot, \partial \widehat{D})}{\operatorname{dist}(\cdot, \partial D)} \right) &\leq g_D f \left(\frac{g_{\widehat{D}}}{g_D} \right) \\ &\leq A_0 \operatorname{dist}(\cdot, \partial D) f \left(a_0 \frac{\operatorname{dist}(\cdot, \partial \widehat{D})}{\operatorname{dist}(\cdot, \partial D)} \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Аналогично, для других вариантов тестовых функций имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Если $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ — возрастающая выпуклая функция с $f(0) = 0$, то для местовой, — из Примера 5.3 с $D' = D$, — функции $f \circ g_D$ при условиях 1g или 2g–3g на область D , обеспечивающих выполнение двусторонних оценок вида (5.9), для некоторой подобласти $D_0 \Subset D$ с $z_0 \in D_0$ на $D \setminus D_0$ с постоянными $0 < b_0 \leq 1 \leq B_0 < +\infty$ из (5.9) справедливы оценки

$$f(b_0 \operatorname{dist}(\cdot, \partial D)) \leq f(g_D) \leq f(B_0 \operatorname{dist}(\cdot, \partial D)). \quad (5.11)$$

Если $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ — выпуклая убывающая функция с правой производной $f'_{\text{right}}(0) < +\infty$, то для местовой, — по Предложению 5.1 с $s = 1$, — функции $g_D f(1/g_D)$ на $D \setminus D_0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} b_0 \operatorname{dist}(\cdot, \partial D) f \left(\frac{1}{b_0 \operatorname{dist}(\cdot, \partial D)} \right) &\leq g_D f(1/g_D) \\ &\leq B_0 \operatorname{dist}(\cdot, \partial D) f \left(\frac{1}{B_0 \operatorname{dist}(\cdot, \partial D)} \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Р. С участием гиперболического радиуса. Отметим аналогичные оценки и для гиперболического радиуса R области $D \Subset \mathbb{C}$ гиперболического типа.

1R. Для некоторого числа $A = \operatorname{const}_D^+$ всегда выполнены неравенства [60; Theorem 3.8]

$$\operatorname{dist}(z, \partial D) \leq R(z, D) \leq A \operatorname{dist}(z, \partial D) \log \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial D)}. \quad (5.13)$$

2R. Если граница ∂D равномерно совершенна (для конечносвязной области это означает, что на её границе нет изолированных точек), то в правой части (5.13) можно убрать логарифмическую часть $\log \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial D)}$ [61; 4.2].

Приведем один из возможных аналогов Предложения 5.4 для конформного радиуса R выпуклой подобласти $D \Subset \mathbb{C}$. В Примере 5.5 в качестве функции $s \in \operatorname{sbh}^+(D)$ выберем продолженную функцию Грина $g_{D'}(\cdot, z_0)$ с полюсом в точке $z_0 \in D_0$ регулярной подобласти $D' \subset D$ с $z_0 \in D_0 \subset D'$. Тогда для выпуклой возрастающей функцией $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ с $f(0) = 0$ функция $Rf(g_{D'}/R) \in \operatorname{sbh}_0^+(D \setminus D_0)$ тестовая и имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.6. Если подобласть $D' \subset D$ вместо D удовлетворяет условию из 1g, то с некоторым числами $0 < a \leq 1 \leq A < +\infty$ имеет место двусторонняя оценка

$$\begin{aligned} \text{dist}(\cdot, \partial D) f \left(a \frac{\text{dist}(\cdot, \mathbb{C}_\infty \setminus D')}{\text{dist}(\cdot, \partial D)} \right) &\stackrel{1R}{\leq} R f \left(\frac{g_{D'}}{R} \right) \\ &\stackrel{1R, 2R}{\leq} A \text{dist}(\cdot, \partial D) f \left(A \frac{\text{dist}(\cdot, \mathbb{C}_\infty \setminus D')}{\text{dist}(\cdot, \partial D)} \right) \end{aligned}$$

Точно такие же двусторонние оценки через функции расстояния легко получить и для тестовых функций вида (5.8) из Примера 5.6 при $s = g_{D'}$ с $D' \subset D$.

5.1.6. Тестовые функции для \mathbb{C} и для проколотой в точках \mathbb{C}_∞ . Используем классическую терминологию из [17]–[23]. Мы не стремимся в этом п. 5.1.6 к построению каких-либо экзотических тестовых функций, поскольку они уже широко охвачены в наших работах [19]–[23] вплоть до функций многих переменных [22], [46]. Поэтому приведем лишь элементарный

ПРИМЕР 5.7. Рассмотрим две соответственно ρ - и γ -тригонометрически выпуклые положительные 2π -периодические функции h и k на \mathbb{R} . Пусть $r_0 > 0$. Тогда для любого $p \geq \rho$ функция

$$H(z) = H(re^{i\theta}) := h(\theta)r^{-p} \geq 0, \quad \text{при } r_0 \leq r < +\infty, \theta \in \mathbb{R}, z = re^{i\theta},$$

субгармоническая на $\mathbb{C} \setminus D(r_0)$ и стремится к нулю при $r \rightarrow +\infty$, а следовательно тестовая и принадлежит классу $\text{sbh}_0^+(\mathbb{C} \setminus D(r_0); \leq \max_{\theta \in [0, 2\pi)} h(\theta)r_0)$. Более тонкие примеры тестовых функций для $D = \mathbb{C}$ на основе ρ -тригонометрически выпуклых функций построены и нашли применения в [19], [20], [22], [46] (в иной терминологии).

Далее, рассмотрим плоскость $D := \mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для простоты лишь с двумя проколотыми точками 0 и ∞ . Тогда для любых $p \geq \rho$ и $l \geq \gamma$ функция

$$H(re^{i\theta}) := \begin{cases} h(\theta)r^{-p}, & \text{при } r_0 \leq r < +\infty, \\ k(\theta)r^l, & \text{при } 0 < r \leq r_0/2 \end{cases}$$

из тех же соображений тестовая из класса

$$\text{sbh}_0^+(\mathbb{C}_* \setminus A(r_0/2, r_0); \leq \max_{\theta \in [0, 2\pi)} \max\{h(\theta)r_0^{-p}, k(\theta)(r_0/2)^l\}),$$

где $A(\cdot, \cdot)$ — кольцо, как в 4.1, 4.4.

5.2. Операции над тестовыми функциями. Приведенные здесь свойства операций, замкнутых на множестве тестовых функций основаны на широко известных общих свойствах субгармонических функций [1]–[7]. Например, если $v \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0, \leq b)$ и $b' \in \mathbb{R}^+$, то $b'v \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0, \leq b'b)$.

Пусть J — множество произвольной природы, элементы которого обозначаем буквой j . Множество J будет выступать как *множество индексов*. Нам будет удобнее обозначать тестовые функции v с индексом j как пару (v, j) . Кроме того, рассматриваем множество чисел $b_j \in \mathbb{R}^+$, $j \in J$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.7. Пусть множество J конечно. Для множества функций $(v, j) \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0, \leq b_j)$, $j \in J$, их сумма из $\text{sbh}_0^+(D \setminus D_0, \leq \sum_{j \in J} b_j)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.8. Пусть $B := \sup_j b_j \in \mathbb{R}^+$. Предположим, что семейство тестовых функций $(v, j) \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0, \leq b_j)$ равномерно по J стремится к нулю при приближении к границе ∂D . Тогда полунепрерывная сверху регуляризация функции $\sup_{j \in J} (v, j)$ из $\text{sbh}_0^+(D \setminus \text{clos } D_0, \leq B)$. Более того, если J — компактное топологическое пространство и функция (v, \cdot) полунепрерывна сверху на $(D \setminus \text{clos } D_0) \times J$, то регуляризация уже не нужна [1; Theorem 2.4.7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.9. Пусть J — направленное множество, а семейство функций $(v, j) \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0, \leq b_j)$ направлено вниз, или фильтруется влево. Тогда $\inf_{j \in J} (v, j) \in \text{sbh}_0^+(D \setminus \text{clos } D_0, \leq \inf_{j \in J} b_j)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.10. Пусть $J \subset \mathbb{R}^+$ неограниченно, $B := \limsup_{j \rightarrow +\infty} b_j \in \mathbb{R}^+$. Предположим, что семейство тестовых функций $(v, j) \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0, \leq b_j)$ равномерно по J стремится к нулю при приближении к границе ∂D . Тогда полунепрерывная сверху регуляризация функции $\limsup_{j \rightarrow +\infty} (v, j)$ принадлежит классу $\text{sbh}_0^+(D \setminus \text{clos } D_0, \leq B)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.11. Пусть (v, j) — тестовые функции, (J, κ) — пространство с мерой $\kappa(J) < +\infty$, функция (v, \cdot) измерима на $(D \setminus \text{clos } D_0) \times J$, функция $z \mapsto \sup_{j \in J} v(z, j)$ локально ограничено сверху на $D \setminus \text{clos } D_0$. Тогда интеграл $\int_J v(z, j) d\kappa(j)$ — тестовая функция [1; Theorem 2.4.8].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.12. Пусть $v \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0, \leq b)$ и в $D \setminus D_0$ задана система непересекающихся регулярных подобластей D_j , $j \in J$. Предположим, что можно выбрать исчерпание $D_n \supset D_0$ области D так, что граница ∂D_n не пересекается ни с одним D_j при больших n . Если гармонически продолжить функцию v внутрь каждой подобласти D_j , то полученная преобразованная функция по-прежнему из класса $\text{sbh}_0^+(D \setminus D_0, \leq b)$ [3; Теорема 2.18].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.13. Рассмотрим, наряду $D_0 \Subset D$, еще одну пару областей $\emptyset \neq D'_0 \Subset D' \neq \mathbb{C}_\infty$. Пусть функция $h \in \text{Hol}(D \setminus D_0)$ с образом $h(D \setminus D_0) \subset D' \setminus D'_0$ удовлетворяет условию: для любой подобласти $D'_1 \Subset D'$ с $D'_0 \subset D'_1$ найдётся подобласть $D_1 \Subset D$ с $D_0 \subset D_1$, для которой $h(D \setminus D_1) \subset D' \setminus D'_1$. Тогда для любой тестовой функции $v \in \text{sbh}_0^+(D' \setminus D'_0, \leq b)$ функция $v \circ h$ тестовая на $D \setminus D_0$ из класса $\text{sbh}_0^+(D \setminus D_0, \leq b)$ [1; Theorem 2.7.4].

§ 6. Основные результаты для нерадиальных мажорант

6.1. Операторы Лапласа и набла для суперпозиций и произведений. Этот во многом вычислительный подраздел, наряду с тем, что дает правила вычисления мер Рисса субгармонических функций, полученных суперпозицией и умножением на функцию, как в Теореме G–K, содержит в себе и новое доказательство Теоремы G–K. Далее для функций f, g класса C^2 исходим из элементарной формулы векторного анализа

$$\Delta(gf) = f\Delta g + 2\nabla g \cdot \nabla f + g\Delta f, \quad (6.1)$$

где $\nabla g \cdot \nabla f$ — скалярное произведение градиентов, и её частного случая с $g = 1$

$$|\nabla f|^2 = \frac{1}{2} \left(\Delta(f^2) - 2f \Delta f \right). \quad (6.2)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть g и s функции класса C^2 на некотором открытом множестве \mathcal{O} в \mathbb{C} , $0 \notin g(\mathcal{O})$ и f — функция класса C^2 на $(s/g)(\mathcal{O})$, $f(s/g) := f \circ \frac{s}{g}$ — суперпозиция. Справедлива формула

$$\Delta \left(g f \left(\frac{s}{g} \right) \right) = f' \left(\frac{s}{g} \right) \Delta s - \left(f' \left(\frac{s}{g} \right) \frac{s}{g} - f \left(\frac{s}{g} \right) \right) \Delta g + g f'' \left(\frac{s}{g} \right) \left| \nabla \frac{s}{g} \right|^2, \quad (6.3)$$

где последний множитель в обозначении $\nabla g \cdot \nabla s$ для скалярного произведения градиентов записывается как «полный квадрат разности»

$$\left| \nabla \frac{s}{g} \right|^2 = \frac{g^2 |\nabla s|^2 - 2gs \nabla g \cdot \nabla s + s^2 |\nabla g|^2}{g^4} \quad (6.4\nabla)$$

$$\stackrel{(6.1), (6.2)}{=} \frac{1}{2g^4} \left(g^2 \Delta(s^2) - 2gs \Delta(gs) + s^2 \Delta(g^2) \right) \quad (6.4\Delta)$$

В частности, при $g = 1$ — тождественная единица, имеем

$$\Delta(f \circ s) = f'(s) \Delta s + f''(s) |\nabla s|^2 = \left(f'(s) - s f''(s) \right) \Delta s + \frac{1}{2} f''(s) \Delta(s^2). \quad (6.5)$$

а при $s = 1$

$$\Delta \left(g f \left(\frac{1}{g} \right) \right) = \left(f \left(\frac{1}{g} \right) - \frac{1}{g} f' \left(\frac{1}{g} \right) - \frac{1}{g^2} f'' \left(\frac{1}{g} \right) \right) \Delta g + \frac{1}{2g^3} f'' \left(\frac{1}{g} \right) \Delta(g^2). \quad (6.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теперь действуем отдельно по каждому слагаемому в правой части (6.1) (ниже в доказательстве роль аргумента в функции f и в производных f всегда играет функция s/g).

$$g \Delta f = g \nabla^2 f = g \nabla \cdot \left(f' \nabla \frac{s}{g} \right) = g \left(f'' \left| \nabla \frac{s}{g} \right|^2 + f' \nabla^2 \frac{s}{g} \right), \quad 2 \nabla g \cdot \nabla f = 2 f' \nabla g \cdot \nabla \frac{s}{g}.$$

Подставляя в (6.1), получаем

$$\begin{aligned} \Delta(g f(s/g)) &= f \Delta g + 2 f' \nabla g \cdot \nabla \frac{s}{g} + g \left(f'' \left| \nabla \frac{s}{g} \right|^2 + f' \nabla^2 \frac{s}{g} \right) \\ &= f \Delta g + f' \left(g \Delta \frac{s}{g} + 2 \nabla g \cdot \nabla \frac{s}{g} \right) + g f'' \left| \nabla \frac{s}{g} \right|^2. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Здесь множитель при f' можно представить в виде

$$\begin{aligned} g \Delta \frac{s}{g} + 2 \nabla g \cdot \nabla \frac{s}{g} &= \left(g \Delta \frac{s}{g} + 2 \nabla g \cdot \nabla \frac{s}{g} + \frac{s}{g} \Delta g \right) - \frac{s}{g} \Delta g \\ &= \left| \text{снова формула (6.1)} \right| = \Delta \left(g \frac{s}{g} \right) - \frac{s}{g} \Delta g = \Delta s - \frac{s}{g} \Delta g. \end{aligned}$$

Таким образом, меняется множитель при f' в (6.7), а именно:

$$\begin{aligned}\Delta(gf(s/g)) &= f\Delta g + 2f'\nabla g \cdot \nabla \frac{s}{g} + g \left(f'' \left| \nabla \frac{s}{g} \right|^2 + f' \nabla^2 \frac{s}{g} \right) \\ &= f\Delta g + f' \left(\Delta s - \frac{s}{g} \Delta g \right) + g f'' \left| \nabla \frac{s}{g} \right|^2 = f' \Delta s + \left(f - f' \frac{s}{g} \right) \Delta g + g f'' \left| \nabla \frac{s}{g} \right|^2,\end{aligned}$$

что совпадает с требуемой формулой (6.3).

Формула (6.4∇) — простая выкладка из векторного анализа:

$$\left| \nabla \frac{s}{g} \right|^2 = \nabla \frac{s}{g} \cdot \nabla \frac{s}{g} = \left(\frac{g \nabla s - s \nabla g}{g^2} \right)^2 = \frac{g^2 |\nabla s|^2 - 2gs \nabla g \cdot \nabla s + s^2 |\nabla g|^2}{g^4}.$$

Переход от (6.4∇) к (6.4Δ) осуществляется за счёт формул (6.1)–(6.2), записанной в трёх различных видах

$$|\nabla s|^2 = \frac{1}{2} \left(\Delta(s^2) - 2s\Delta s \right) \quad (6.8s)$$

$$2\nabla g \cdot \nabla s = \Delta(gs) - g\Delta s - s\Delta g. \quad (6.8gs)$$

$$|\nabla g|^2 = \frac{1}{2} \left(\Delta(g^2) - 2g\Delta g \right) \quad (6.8g)$$

Подстановка выражений (6.8) в (6.4∇) после приведения подобных и даёт (6.4Δ). Оставшиеся формулы (6.5) и (6.6) — частные случаи (6.3)–(6.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ G–K (с явной мерой Рисса). В случае (i) в правой части (6.3) остаётся только последнее слагаемое в (6.3), а оно, очевидно, положительно. Другими словами

- (i) в случае (i) плотность меры Рисса субгармонической функции $gf(s/g)$ задаётся с учётом (6.4Δ) выражением

$$\frac{1}{4\pi g^3} \left(g^2 \Delta(s^2) - 2gs\Delta(gs) + s^2 \Delta(g^2) \right) f''(s/g). \quad (6.9)$$

В случае (ii) там же остаются только первое и последнее слагаемое, которые положительны. Другими словами

- (ii) в случае (ii) плотность меры Рисса субгармонической функции $gf(s/g)$ задаётся с учётом (6.4Δ) выражением

$$f' \left(\frac{s}{g} \right) d\nu_s + \frac{1}{4\pi g^3} \left(g^2 \Delta(s^2) - 2gs\Delta(gs) + s^2 \Delta(g^2) \right) f''(s/g), \quad (6.10)$$

где ν_s — мера Рисса субгармонической функции s .

В случае (iii) вопрос только в положительности промежуточного слагаемого, а это следует из условия $\Delta g \leq 0$ и очевидного свойства $f'(x) \geq f(x)$ для выпуклых функций $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ с $f(0) = 0$. При этом

- (iii) случае (ii) плотность меры Рисса субгармонической функции $gf(s/g)$ задаётся с учётом (6.4Δ) выражением

$$\begin{aligned}f' \left(\frac{s}{g} \right) d\nu_s + \left(f' \left(\frac{s}{g} \right) \frac{s}{g} - f \left(\frac{s}{g} \right) \right) d\nu_{-g} \\ + \frac{1}{4\pi g^3} \left(g^2 \Delta(s^2) - 2gs\Delta(gs) + s^2 \Delta(g^2) \right) f''(s/g), \quad (6.11)\end{aligned}$$

где ν_s и ν_{-g} — меры Рисса субгармонических функций s и $-g$.

Для перехода к общему случаю (не класса C^2) пользуемся отработанной техникой аппроксимации суб- и супергармонических и выпуклых функций монотонными последовательностями функций класса C^2 . То, что в определениях плотностей мер Рисса в (6.9)–(6.11) участвуют именно операторы Лапласа, т.е. нет градиентов, позволяет утверждать, что (6.9)–(6.11) в этом общем случае можно рассматривать, как плотности мер Рисса, определённые в смысле теории распределений, т.е. обобщенных функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Выражения (6.9)–(6.11) определяют и явный вид мер Рисса тестовых функций из всех Предложений и Примеров подраздела 5.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Нам известны два варианта многомерных обобщений Теоремы 5. Первый из них, практически идентичный, даёт подобные формулы для оператора Лапласа от подобных же суперпозиций в \mathbb{R}^k . Второй, более деликатный, связан с заменой оператора Лапласа на форму Леви в \mathbb{C}^n (см. и ср. с [7; Theorem 2.9.19]). Мы намерены вернуться к этому в ином месте.

6.2. Субгармонические мажоранты-суперпозиции. В рамках Основной Теоремы, Теоремы 1 и Следствия 1.1 имеет значение лишь вид меры Рисса субгармонической функции-мажоранты $M \in \text{sbh}(D)$ вблизи границы ∂D , т.е. при рамочном соглашении (D) из п. 1.3.5 Введения в окрестности $D \setminus D_0$, в $D \setminus \text{clos } D_0$ или в $D \setminus \{z_0\}$ при некотором $z_0 \in D_0$. Сначала рассмотрим более простой случай суперпозиции выпуклой и субгармонической функции.

ТЕОРЕМА 6. Пусть мажоранта имеет вид $M = F \circ s$ — суперпозиция выпуклой возрастающей функции $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^2 с $F(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ и $s \in \text{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$, т.е. по Предложению C(ii) с $g = 1$ имеем $F \circ s \in \text{sbh}(D)$. Введём обозначения ν_s и ν_{s^2} для мер Рисса функций s и $s^2 \in \text{sbh}(D)$. Пусть $z_0 \in D_0$, $u \in \text{sbh}(D)$ с $u(z_0) \neq -\infty$ с мерой Рисса ν_u , $u \leq F \circ s$ на $D \setminus D_0$; $b \in \mathbb{R}^+$. Тогда найдутся постоянные $C, \overline{C}_M \in \mathbb{R}^+$ вида (1.16), с которыми для любой тестовой функции $v \in \text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b)$

$$\int_{D \setminus D_0} v d\nu_u \leq \int_{D \setminus D_0} (F'(s) - sF''(s)) v d\nu_s + \frac{1}{2} \int_{D \setminus D_0} v F''(s) d\nu_{s^2} + C\overline{C}_M - Cu(z_0). \quad (6.12)$$

В частности, если сумма интегралов в правой части (6.12) конечна ($< +\infty$), то конечен и интеграл в левой части. В случае $u = \log |h|$ с ненулевой функцией $h \in \text{Hol}(D)$, обращающейся в нуль на последовательности $Z = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset D$, левая часть (6.12) будет выглядеть как сумма из левой части (1.18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнены условия Теоремы 1. Соотношение (6.12) — в точности (1.17), поскольку в правой части берётся интеграл от v по мере Рисса

$$\nu_M = \nu_{F \circ s} = (F'(s) - sF''(s))\nu_s + \frac{1}{2}F''(s)\nu_{s^2} \quad (6.13)$$

— частный случай (6.10) п. (ii) с $g = 1$ и F вместо f нашего доказательства теоремы Г–К (с явной мерой Рисса) из подраздела 6.1.

ДОПОЛНЕНИЕ 6.1 к Теореме 6. Мера Рисса из (6.12) может определяться и иначе. Из первого тождества в (6.5) с F вместо f , переписанного в виде

$$\Delta(F \circ s) = F'(s)\Delta s + F''(s)|\nabla s|^2 = F'(s)\Delta s + \nabla F'(s) \cdot \nabla s$$

по первой формуле Грина для подобластей $U \Subset D \setminus \text{clos } D_0$ с границей класса C^1 и функцией $s \in \text{sbh}(D)$ с сужением на $D \setminus \text{clos } D_0$ класса C^2 имеем

$$\nu_{F \circ s}(U) = \frac{1}{2\pi} \int (F'(s)\Delta s + \nabla F'(s) \cdot \nabla s) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U} F'(s) \frac{\partial s}{\partial \vec{n}_{\text{out}}} d\sigma, \quad (6.14)$$

где λ — мера Лебега, σ — мера длины границы ∂U , $\frac{\partial}{\partial \vec{n}_{\text{out}}}$ — оператор дифференцирования по внешней нормали.

6.2.1. Мажоранта-суперпозиция с функцией Грина. Пусть $F: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая возрастающая функция, доопределенная, как в Теореме C(ii), равенством $F(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$. Пусть $z_0 \in D_0 \Subset D \subset \widehat{D}$ и \widehat{D} — область с неполярной границей. Возможно $\widehat{D} = D$. Тогда $s(z) := -g_{\widehat{D}}(z, z_0)$, где $z \in D$ и $g_{\widehat{D}}(z_0, z_0) := +\infty$, — субгармоническая по z функция в области D [1], [3].

Субгармоническое по Теореме C(ii) сужение на D функции-суперпозиции $M := F \circ (-g_{\widehat{D}}(\cdot, z_0)) \in \text{sbh}(\widehat{D})$ и обсуждается в данном п. 6.2.1. Поскольку сужение $g_{\widehat{D}} := g_{\widehat{D}}(\cdot, z_0)$ на $D \setminus \{z_0\}$ — гармоническая функция, то в данном случае с функцией F класса C^2 мера Рисса функции $F \circ (-g_{\widehat{D}})$ задаётся как

$$\nu_{F \circ (-g_{\widehat{D}})} \stackrel{(6.5)}{=} \frac{1}{4\pi} F''(-g_{\widehat{D}}) \Delta((g_{\widehat{D}})^2) \lambda \stackrel{(6.5)}{=} \frac{1}{2\pi} F''(-g_{\widehat{D}}) |\nabla g_{\widehat{D}}|^2 \lambda$$

на $D \setminus \{z_0\}$, где $(g_{\widehat{D}})^2 \in \text{sbh}^+(D \setminus \{z_0\})$, λ — мера Лебега. Иная форма из Дополнения 6.1 к Теореме 6 в обозначениях после (6.14) —

$$\nu_{F \circ (-g_{\widehat{D}})}(U) \stackrel{(6.14)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U} F'(-g_{\widehat{D}}) \frac{\partial(-g_{\widehat{D}})}{\partial \vec{n}} d\sigma, \quad U \Subset D. \quad (6.15)$$

В частности, если $t_0 \in (0, +\infty)$, $0 < t < t_0$, и рассматриваем только относительно компактные регулярные подобласти

$$U_t := \{z \in D: g_{\widehat{D}}(z, z_0) > t\} \Subset D \quad \text{в } D \text{ с границей класса } C^1 \quad (6.16)$$

и в точности с линиями уровня $\{z \in D: g_{\widehat{D}}(z, z_0) = t\}$, совпадающими с границей ∂U_t , то функция $g_{\widehat{D}}(\cdot, z_0) - t$, рассматриваемая только на U_t , обладает всеми свойствами, полностью характеризующими функции Грина области U_t с полюсом z_0 [3; Теорема 5.27], т. е. для выбранного числа $t > 0$

$$g_{\widehat{D}}(\cdot, z_0) - t \Big|_{U_t} = g_{U_t} \quad \text{— функция Грина для } U_t \text{ с полюсом } z_0. \quad (6.17)$$

Следовательно, (6.15) при таких $0 < t_2 < t_1 < t_0$ для подобласти-разности $U_{t_2 < t_1} := U_{t_2} \setminus \text{clos } U_{t_1}$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \nu_{F \circ (-g_{\widehat{D}})}(U_{t_2 < t_1}) &\stackrel{(6.15)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U_{t_2 < t_1}} F'(-g_{\widehat{D}}) \frac{\partial(-g_{\widehat{D}})}{\partial \vec{n}} d\sigma \\ &= F'(-t_2) \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U_{t_2}} \frac{\partial(-g_{\widehat{D}} + t_2)}{\partial \vec{n}_{\text{out for } U_{t_2}}} d\sigma + F'(-t_1) \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U_{t_1}} \frac{\partial(-g_{\widehat{D}} + t_1)}{\partial \vec{n}_{\text{inner for } U_{t_1}}} d\sigma \\ &\stackrel{(6.17)}{=} F'(-t_2) \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U_{t_2}} \frac{\partial(-g_{U_{t_2}})}{\partial \vec{n}_{\text{out for } U_{t_2}}} d\sigma + F'(-t_1) \frac{1}{2\pi} \int_{\partial U_{t_1}} \frac{\partial(-g_{U_{t_1}})}{\partial \vec{n}_{\text{inner for } U_{t_1}}} d\sigma. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Поскольку в данных условиях гладкости границ ∂U_{t_1} и ∂U_{t_2}

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial(-g_{U_{t_2}})}{\partial \vec{n}_{\text{out for } U_{t_2}}}, \quad \frac{1}{2\pi} \frac{\partial g_{U_{t_1}}}{\partial \vec{n}_{\text{inner for } U_{t_1}}}$$

— это ядра Пуассона (с центром z_0) или плотности гармонических мер в точке z_0 соответственно для областей U_{t_2} и U_{t_1} на границе ∂U_{t_2} и на границе ∂U_{t_1} , то, домноженные на $1/2\pi$, первый из интегралов в правой части (6.18) равен 1, а второй равен -1 . Таким образом, из (6.18) следует

$$\nu_{F \circ (-g_{\widehat{D}})}(U_{t_2 < t_1}) = F'(-t_2) - F'(-t_1), \quad -t_0 < -t_1 < -t_2 < 0,$$

или, в терминах плотности меры Рисса на линиях уровня функции Грина $g_{\widehat{D}}$

$$\frac{d}{dt} \nu_{F \circ (-g_{\widehat{D}})}(U_t) = F''(-t), \quad -t_0 < -t < 0. \quad (6.19)$$

Рассмотрим отдельно некоторые специальные случаи.

Г. Случай $\widehat{D} = D$ и суперпозиции с $-g_D$. Во избежание технических осложнений считаем, что вместе с $\widehat{D} = D$ — регулярная область, начиная с некоторого $t_0 > 0$, все области U_t из (6.16) при $0 < t \leq t_0$ такие же, как описано при (6.16). Для широкого класса конечносвязных областей реализации этого подробно описаны в [8; Гл. V, § 1]. Функция F класса C^2 та же, что и в начале п. 6.2.1; $g_D := g_D(\cdot, z_0)$. В рамках соглашений данного пп. **Г** имеет место

ТЕОРЕМА 7. Пусть мажоранта $M = F \circ (-g_D)$, — очевидно, субгармоническая на D , — и функция $u \in \text{sbh}(D)$ с $u(z_0) \neq -\infty$ и мерой Рисса ν_u удовлетворяют условию $u \leq M$ на $D \setminus U_{t_0}$, $z_0 \in U_{t_0}$, $b \in \mathbb{R}^+$. Тогда найдутся постоянные $C, \overline{C}_M \in \mathbb{R}^+$ вида (1.16) с $D_0 := U_{t_0}$, с которыми

(а) для любой выпуклой возрастающей функции $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ с $f(0) = 0$ и $f(t_0) \leq b$ выполнено неравенство

$$\int_{D \setminus U_{t_0}} (f \circ g_D) d\nu_u \leq \int_0^{t_0} f(t) F''(-t) dt + C \overline{C}_M - C u(z_0); \quad (6.20)$$

(б) для любой выпуклой убывающей функции $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ с правой производной $f'_{\text{right}}(0) < +\infty$ и с $f(0) \leq b/t_0$ выполнено неравенство

$$\int_{D \setminus U_{t_0}} g_D f(1/g_D) d\nu_u \leq \int_0^{t_0} t f(1/t) F''(-t) dt + C \overline{C}_M - C u(z_0). \quad (6.21)$$

В частности, если интеграл в правой части (6.20) или (6.21) конечен, то конечен и интеграл в левой части соответственно (6.20) или (6.21). Для $u = \log|h|$ с ненулевой функцией $h \in \text{Hol}(D)$, обращающейся в нуль на $Z = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset D$, левая часть (6.20) или (6.21) будет соответственно выглядеть как сумма $\sum_{z_k \in D \setminus U_{t_0}} f(g_D(z_k, z_0))$ или $\sum_{z_k \in D \setminus U_{t_0}} g_D(z_k, z_0) f(1/g_D(z_k, z_0))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай (а). Функция $f \circ g_D$ из класса $\text{sbh}(D \setminus U_{t_0}; \leq b)$ по Предложению 5.3(b) при выборе $g := 1$ и $s := g_D$ и условию $f(t_0) \leq b$, т. е., в частности, тестовая функция из Предложения 5.3 п. 5.1.3. Тогда по Теореме 1 неравенство (1.17) переписывается в требуемом виде

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus U_{t_0}} (f \circ g_D) d\nu_u &\leq \int_{D \setminus U_{t_0}} (f \circ g_D) d\nu_M + C\overline{C}_M - Cu(z_0) \\ &= \int_{D \setminus U_{t_0}} (f \circ g_D) d\nu_{F \circ (-g_D)} + C\overline{C}_M - Cu(z_0) = \int_0^{t_0} f(t) d\nu_{F \circ (-g_D)}(U_t) + C\overline{C}_M - Cu(z_0) \\ &\stackrel{(6.19)}{=} \int_0^{t_0} f(t) F''(-t) dt + C\overline{C}_M - Cu(z_0). \end{aligned}$$

Случай (б). Ввиду условия $f'_{\text{right}}(0) < +\infty$ функция f может быть продолжена на \mathbb{R} как аффинная на $(-\infty, 0]$ и выпуклая убывающая на \mathbb{R} . По Предложению 5.1 с $s := 1$ и $g := g_D$ функция $g_D f(1/g_D)$ тестовая из класса $\text{sbh}_0^+(D \setminus U_{t_0}; \leq b)$. Дальнейшие рассуждения и выкладки такие же, как и в Случае (а).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.3. Для всякой функции $M: D \rightarrow \mathbb{R}$, постоянной на каждой линии уровня функции Грина $g_D(\cdot, z_0)$ с полюсом $z_0 \in D$ и непрерывной в точке $z_0 \in D$, очевидно, можно однозначно построить некоторую функцию $F: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, для которой существует предел $F(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ и $M := F \circ (-g_D)$ на D . Допустим, что F — возрастающая в правой окрестности точки $-\infty$ функция класса C^2 на $(-\infty, 0)$. Из равенства (6.5), записанного с $f = F$ и $s = -g_D$ в виде

$$\frac{1}{2\pi} \Delta(F \circ (-g_D)) = \frac{1}{2\pi} F''(-g_D) |\nabla g_D|^2 = \frac{1}{4\pi} F''(-g_D) \Delta((g_D)^2) \quad (6.22)$$

легко понять, что $M = F \circ (-g_D) \in \text{sbh}(D)$ тогда и только тогда, когда F — выпуклая на $(-\infty, 0)$, а следовательно, ввиду возрастания справа от $-\infty$, и всюду возрастающая функция (обязательно с плотностью (6.22) её меры Рисса $\nu_{F \circ (-g_D)}$, сосредоточенной, ввиду конечности $M(z_0)$, вне точки z_0). Таким образом, Теорема 7 охватывает при F класса C^2 все возможные случаи мажорант $M: D \rightarrow \mathbb{R}$, постоянных на линиях уровня функции Грина области D с фиксированным полюсом $z_0 \in D$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.4. Используя аппроксимацию произвольной выпуклой функции $F: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}^+$ убывающей последовательностью выпуклых функций класса C^2 , в предположении, что для одной из аппроксимирующих функций интеграл в правой части (6.20) конечен, условие « F из класса C^2 » в Теореме 7 можно снять, если переписать интеграл в правой части (6.20) в виде

$$\int_{-t_0}^0 f(-t) dF'_{\text{right}}(t) = - \int_0^{t_0} f(t) dF'_{\text{left}}(-t). \quad (6.23)$$

LG. *Случай $\widehat{D} = D$ и суперпозиция $s - \log(1 + g_D)$.* Остаёмся в рамках соглашений пп. **G** перед Теоремой 7. Из Примера 5.4 $-\log(1 + g_D) \in \text{sbh}(D)$. Учитывая Теорему C(ii), для мажоранты $M := F \circ (-\log(1 + g_D)) \in \text{sbh}(D)$

$$\begin{aligned} \Delta M &= \Delta \left(F \circ (-\log(1 + g_D)) \right) = \nabla \cdot \nabla \left(F \circ (-\log(1 + g_D)) \right) - \nabla \cdot \left(F' (1 + g_D) \frac{-\nabla g_D}{1 + g_D} \right) \\ &= F''(-\log(1 + g_D)) \frac{|\nabla g_D|^2}{(1 + g_D)^2} + F'(-\log(1 + g_D)) \frac{-(1 + g_D) \nabla^2 g_D + \nabla g_D \cdot \nabla g_D}{(1 + g_D)^2} \\ &= \left(F''(-\log(1 + g_D)) + F'(-\log(1 + g_D)) \right) \frac{|\nabla g_D|^2}{(1 + g_D)^2} \\ &\stackrel{(6.2)}{=} \left(F''(-\log(1 + g_D)) + F'(-\log(1 + g_D)) \right) \frac{\Delta((g_D)^2)}{2(1 + g_D)^2} \quad (6.24) \end{aligned}$$

и плотность её меры Рисса ν_M равна деленному на 2π последнему выражению.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $M := F \circ (-\log(1 + g_D)) \in \text{sbh}(D)$ и функция $u \in \text{sbh}(D)$ с $u(z_0) \neq -\infty$ и мерой Рисса ν_u удовлетворяют условию $u \leq M$ на $D \setminus D_0$, $z_0 \in D_0$, $b \in \mathbb{R}^+$. Тогда найдутся $C, \overline{C}_M \in \mathbb{R}^+$ вида (1.16), с которыми для любых выпуклой возрастающей функции $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ с $f(0) = 0$ и функции $s \in \text{sbh}^+(D \setminus D_0)$ при ограничениях

$$t_0 := \sup_{z \in D \setminus D_0} \frac{s(z)}{\log(1 + g_D(z, z_0))} < +\infty, \quad f(t_0) \sup_{\partial D_0} g_D \leq b \quad (6.25)$$

выполнено неравенство

$$\begin{aligned} &\int_{D \setminus D_0} f\left(\frac{s}{\log(1 + g_D)}\right) \log(1 + g_D) d\nu_u \\ &\stackrel{(6.24)}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{D \setminus D_0} f\left(\frac{s}{\log(1 + g_D)}\right) \frac{g_D \Delta((g_D)^2)}{2(1 + g_D)^2} (F'' + F') \circ (-\log(1 + g_D)) d\lambda \\ &\quad + C\overline{C}_M - Cu(z_0). \quad (6.26) \end{aligned}$$

В частности, если интеграл в правой части (6.26) конечен, то конечен и интеграл в левой части (6.26). Для $u = \log|h|$ с $0 \neq h \in \text{Hol}(D)$ и $h(Z) = 0$ для $Z = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset D$, левая часть (6.26) будет выглядеть как сумма

$$\sum_{z_k \in D \setminus D_0} f\left(\frac{s(z_k)}{\log(1 + g_D(z_k, z_0))}\right) \log(1 + g_D(z_k, z_0)).$$

Доказательство опускаем, поскольку оно выводится из Теоремы 1 так же, как доказательство Теоремы 7, но для тестовых функций $f\left(\frac{s}{\log(1 + g_D)}\right) \log(1 + g_D)$ из Примера 5.4, приведённых в (5.4). При этом ко второму неравенству в (6.25) и в правой части (6.26) применяем очевидное неравенство $\log(1 + g_D) \leq g_D$.

Один из наиболее простых выборов функции $s \in \text{sbh}^+(D)$, удовлетворяющих условиям (6.25) с некоторой постоянной b , — это степень g_D^p с $p \geq 1$ или суперпозиция $q \circ g_D$ с выпуклой возрастающей функцией $q: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, для которой $q(t) = O(t)$ при $0 < t \rightarrow 0$.

6.2.2. Мажоранта-суперпозиция с гиперболическим радиусом. Далее, как и в п. 5.1.4 функция $R: D \rightarrow \mathbb{R}^+$ — гиперболический радиус области D с не менее чем тремя граничными точками. Предполагаем, что $\infty \notin \partial D$.

Р. *Выпуклая область D и суперпозиция с $-R$.* Пусть, как и в п. 6.2.1, $F: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая возрастающая функция, доопределенная, как в п. 6.2.1, по непрерывности в точке $-\infty$. Для выпуклой области D , как отмечено выше в Примере 5.5, её гиперболический, или конформный, радиус супергармоничен, т. е. $-R \in \text{sbh}(D)$. Тогда по Теореме C(ii) функция $M := F \circ (-R)$ субгармонична в D и для F класса C^2 плотность её меры Рисса ν_M равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \Delta(F \circ (-R)) &= \frac{1}{2\pi} \nabla^2(F \circ (-R)) = \frac{1}{2\pi} \nabla \cdot (F'(-R) \nabla(-R)) \\ &= \frac{1}{2\pi} F''(-R) |\nabla R|^2 + \frac{1}{2\pi} F'(-R) \nabla^2(-R), \end{aligned}$$

откуда по уравнению Лиувилля (5.5) для конформного радиуса имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \Delta(F \circ (-R)) &= \frac{1}{2\pi} F''(-R)(R\Delta R + 4) - \frac{1}{2\pi} F'(-R)\Delta R \\ &= \frac{2}{\pi} F''(-R) + \frac{1}{2\pi} (F''(-R)R - F'(-R))\Delta R. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Следующий результат доказывается так же, как Теоремы 7 и 8, но для тестовых функций из Примера 5.5.

ТЕОРЕМА 9. *В соглашениях и обозначениях этого пп. 6.2.2Р для $u \in \text{sbh}(D)$ с $u(z_0) \neq -\infty$ и мерой Рисса ν_u с ограничением $u \leq F \circ (-R)$ на $D \setminus D_0$ для любого числа $b \in \mathbb{R}^+$ найдутся постоянные C, \overline{C}_M вида (1.16), с которыми для любых выпуклой возрастающей функции $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ с $f(0) = 0$ и функции $s \in \text{sbh}^+(D \setminus D_0)$ при ограничениях*

$$t_0 := \sup_{z \in D \setminus D_0} \frac{s(z)}{R(z, D)} < +\infty, \quad f(t_0) \sup_{z \in \partial D_0} R(z, D) \leq b$$

выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus D_0} R f\left(\frac{s}{R}\right) d\nu_u &\stackrel{(6.27)}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{D \setminus D_0} R f\left(\frac{s}{R}\right) \left(4F''(-R) \right. \\ &\quad \left. + (F''(-R)R - F'(-R))\Delta R\right) d\lambda + C\overline{C}_M - Cu(z_0). \end{aligned} \quad (6.28)$$

В частности, если интеграл в правой части (6.28) конечен, то конечен и интеграл в левой части (6.28). Для $u = \log |h|$ с функцией $0 \neq h \in \text{Hol}(D)$, обращающейся в нуль на $Z = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset D$, левая часть (6.28) будет выглядеть как сумма $\sum_{z_k \in D \setminus D_0} R(z_k, D) f(s(z_k)/R(z_k, D))$.

LR. *Область D гиперболического типа и суперпозиция с $-\log R$.* При априорных условиях (5.6) можем использовать тестовую функцию вида (5.8) из Примера 5.6. Кроме того, для области $D \subset \mathbb{C}_\infty$ гиперболического типа с гиперболическим радиусом R всегда $-\log R \in \text{sbh}(D)$ [61; 3.1] в силу равенства

$$\Delta \log R = -\frac{4}{R^2} < 0 \quad \text{на } D. \quad (6.29)$$

Для выпуклой возрастающей функции $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^2 и субгармонической, по Теореме C(ii), мажоранты $M := F \circ (-\log R)$ на D с плотностью меры Рисса относительно меры Лебега, определяемой делением на 2π любого из равных друг другу выражений

$$\begin{aligned} \Delta M &= \nabla^2(F \circ (-\log R)) \stackrel{(6.29)}{=} F''(-\log R) \left\{ \frac{|\nabla(\log R)|^2}{|\nabla R|^2/R^2} \right\} + \frac{4}{R^2} F'(-\log R) \\ &\stackrel{(6.2)}{=} \begin{cases} \frac{1}{2} F''(-\log R) \Delta \log^2 R + \frac{4}{R^2} (F''(-\log R) \log R + F'(-\log R)), \\ \frac{1}{2} F''(-\log R) \frac{\Delta R^2}{R^2} - \frac{1}{R} F''(-\log R) \Delta R + \frac{4}{R^2} F'(-\log R), \end{cases} \end{aligned} \quad (6.30)$$

также можно легко выписать аналог Теоремы 8 с тестовыми функциями из Примера 5.6 или любыми иными. Возможный вариант —

ТЕОРЕМА 10. В соглашениях и обозначениях этого пп. 6.2.2LR для функции $u \in \text{sbh}(D)$ с $u(z_0) \neq -\infty$ и мерой Рисса ν_u с ограничением $u \leq F \circ (-\log R)$ на $D \setminus D_0$ для любого числа $b \in \mathbb{R}^+$ найдутся постоянные $C, \overline{C}_M \in \mathbb{R}^+$ вида (1.16), с которыми для любых выпуклой возрастающей функции $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ с $f(0) = 0$ и функции $s \in \text{sbh}^+(D \setminus D_0)$ при ограничениях

$$t_0 := \sup_{z \in D \setminus D_0} \frac{s(z)}{\log(1 + NR)} < +\infty, \quad f(t_0) \sup_{\partial D_0} R \leq b/N$$

выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus D_0} f\left(\frac{s}{\log(1 + NR)}\right) \log(1 + NR) d\nu_u \\ \stackrel{(6.24)}{\leq} \frac{N}{4\pi} \int_{D \setminus D_0} f\left(\frac{s}{\log(1 + NR)}\right) \left(F''(-\log R) R \Delta \log^2 R \right. \\ \left. + \frac{8}{R} (F''(-\log R) \log R + F'(-\log R)) \right) d\lambda + C \overline{C}_M - C u(z_0). \end{aligned} \quad (6.31)$$

В частности, если интеграл в правой части (6.31) конечен, то конечен и интеграл в левой части (6.31). Для $u = \log|h|$ с $0 \neq h \in \text{Hol}(D)$ и $h(Z) = 0$ для $Z = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset D$, левая часть (6.31) будет выглядеть как сумма

$$\sum_{z_k \in D \setminus D_0} f\left(\frac{s(z_k)}{\log(1 + NR(z_k, z_0))}\right) \log(1 + NR(z_k, z_0)).$$

6.2.3. Мажоранты от расстояния до подмножества на ∂D . Пусть $E \subset \mathbb{C}_\infty$ — непустое замкнутое собственное подмножество в \mathbb{C}_∞ ,

$$d_E(z) := \text{dist}(z, E) \quad \text{при } z \in \mathbb{C}, \quad d_E(\infty) := \begin{cases} +\infty & \text{при } \infty \notin E, \\ 0 & \text{при } \infty \in E. \end{cases} \quad (6.32)$$

Для различных форм записей или для краткости введём обозначения

$$\mathcal{O} := \mathbb{C}E := \mathbb{C}_\infty \setminus E \neq \emptyset \quad \text{— дополнение } E \text{ до } \mathbb{C}_\infty, \quad (6.33\mathcal{O})$$

являющееся открытым собственным подмножеством в \mathbb{C}_∞ ,

$$d_{\mathbb{C}_\infty \setminus \mathcal{O}}(z) = d_{\mathcal{O}} = d_E(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (6.33d)$$

Рассмотрим сначала

Д. Случай $E = \mathbb{C}D$ и мажоранты $M = F \circ (-d_E)$. В этом пп. **Д** предполагаем, что $D := \mathbb{C}_\infty \setminus E$ — область такая же, как в пп. **6.2.1G** и для нее выполнено условие **1g** или пара условий **2g–3g** из п. **5.1.5**.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $F: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция класса C^2 и функция $u \in \text{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$ удовлетворяет неравенству $u \leq M := F \circ (-d_{\mathbb{C}D})$ на D ; постоянные $0 < b_0 \leq 1 \leq B_0 < +\infty$ из (5.9); $b \in \mathbb{R}^+$. Тогда найдутся подобласть $D_0 \Subset D$ и постоянные $C, \overline{C}_M \in \mathbb{R}^+$ вида (1.16), с которыми

(а) для любой выпуклой возрастающей функции $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ с $f(0) = 0$ при $t_0 := B_0 \sup_{\partial D_0} d_{\mathbb{C}D}$ и $f(t_0) \leq b$ справедливо неравенство

$$\int_{D \setminus D_0} f(b_0 d_{\mathbb{C}D}) d\nu_u \leq \frac{1}{B_0^2} \int_0^{t_0} f(t) F''\left(-\frac{1}{B_0} t\right) dt + C \overline{C}_M - C u(z_0); \quad (6.34)$$

(б) для любой выпуклой убывающей функции $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ с правой производной $f'_{\text{right}}(0) < +\infty$ и с $f(0) B_0 \sup_{\partial D_0} d_{\mathbb{C}D} \leq b$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus D_0} d_{\mathbb{C}D} f\left(\frac{1}{b_0 d_{\mathbb{C}D}}\right) d\nu_u \\ \leq \frac{1}{b_0 B_0^2} \int_0^{t_0} t f(1/t) F''(-t/B_0) dt + C \overline{C}_M - C u(z_0). \end{aligned} \quad (6.35)$$

В частности, если интеграл в правой части (6.34) или (6.35) конечен, то конечен и интеграл в левой части соответственно (6.34) или (6.35). Для $u = \log |h|$ с ненулевой функцией $h \in \text{Hol}(D)$, обращающейся в нуль на $Z = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset D$, левая часть (6.34) или (6.35) будет соответственно выглядеть как сумма $\sum_{z_k \in D \setminus D_0} f(b_0 d_{\mathbb{C}D}(z_k))$ или $\sum_{z_k \in D \setminus D_0} d_D(z_k) f(1/b_0 d_{\mathbb{C}D}(z_k))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться соответственно Случаями (а) и (б) Теоремы 7 и оценками (5.11) и (5.12) Предложения 5.5 для тестовых функций, а также оценкой $u \leq F(-d_{\mathbb{C}D}) \leq F(-g_D/B_0)$ на $D \setminus D_0$, где подобласть $D_0 \Subset D$ расширена настолько, что $z_0 \in U_{t_0} \subset D_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.5. См. Замечание 6.4 с (6.23).

д. 0 функции расстояния. Напомним некоторые свойства функции расстояния, предварив их необходимыми определениями из [68].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 [68; Definitions 1.1.1, 2.1.1]. Пусть $S \subset \mathbb{C}$. Непрерывная функция $q: S \rightarrow \mathbb{R}$ называется *полувогнутой* (с линейным модулем) на S , если существует число $K \in \mathbb{R}^+$, для которого

$$tq(z) + (1-t)q(z') - q(tz + (1-t)z') \leq \frac{K}{2} t(1-t)|z - z'|^2$$

для всех $0 \leq t \leq 1$ и $z, z' \in S$, для которых отрезок $[z, z']$ содержится в S . Число K называется *постоянной полувогнутости* для q на S .

Через $\text{scl}(\mathcal{O}')$ обозначается класс всех полувогнутых на S функций; $\text{scl}_{\text{loc}}(S)$ — класс локально полувогнутых функций, т. е. полувогнутых на каждом компактном в \mathbb{C} подмножестве из S .

В случае *открытого выпуклого множества* $S \subset \mathbb{C}$ функция g полувогнута на S с постоянной полувогнутости K тогда и только тогда, когда функция $z \mapsto g(z) - \frac{K}{2}|z|^2$, $z \in S$, вогнутая на S [68; Proposition 1.1.3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8 ([68; Definition 2.2.1], [69; 1]). Замкнутое множество $S \subset \mathbb{C}$ удовлетворяет *условию внутренней сферы*¹¹ для некоторого $r > 0$, если S — объединение замкнутых кругов радиуса r , т. е. для каждой точки $z \in S$ найдётся точка $z' \in \mathbb{C}$, для которой $z \in \overline{D}(z', r) \subset S$. Множество S удовлетворяет *условию внешней сферы*¹² для некоторого $r > 0$, если для каждой точки $z \in \partial S$ найдётся точка $z' \notin S$, для которой $D(z', r) \cap S = \emptyset$ и $|z - z'| = r$.

Если значение $r > 0$ не уточняется, то говорят, что S удовлетворяет *равномерному условию* соответственно *внутренней* и *внешней сферы*.

СВОЙСТВА функции расстояния ([68; Proposition 2.2.2], [70; Proposition 3.2], [71; 14.6]). Пусть $E \subset \mathbb{C}$ непустое и замкнутое подмножество в \mathbb{C} . Тогда

1. Функция d_E удовлетворяет условию Липшица

$$|d_E(z) - d_E(z')| \leq |z - z'| \quad \text{для всех } z, z' \in \mathbb{C},$$

дифференцируема почти всюду на $\mathcal{O}' := \mathbb{C} \setminus E$ и даже на $\mathcal{O}' \setminus \Sigma$, где Σ — объединение не более чем счётного числа спрямляемых дуг, а также для неё имеет место уравнение эйконала

$$\begin{cases} |\nabla d_E|^2 = 1 & \text{почти всюду на } \mathcal{O}' \text{ и даже на } \mathcal{O}' \setminus \Sigma, \\ d_E \Big|_{\partial \mathcal{O}'} = 0. \end{cases} \quad (6.36)$$

2. Если $\mathcal{O}' := \mathbb{C} \setminus E$ — ограниченная в \mathbb{C} область с границей класса C^2 с кривизной k , то функция d_E класса C^2 в $\{z \in \text{clos } \mathcal{O}': d_E(z) < k\}$.
3. $d_E^2 := (d_E)^2 \in \text{scl}(\mathbb{C})$ — функция с постоянной полувогнутости, равной 2, т. е. функция $z \mapsto d_E^2(z) - |z|^2$ вогнутая на \mathbb{C} .
4. $d_E \in \text{scl}_{\text{loc}}(\mathbb{C} \setminus E)$. Более точно и общо, для любого $S \subset \mathbb{C}$ при условии $\text{dist}(S, E) > 0$ функция d_E полувогнута на S с постоянной полувогнутости, равной $1/\text{dist}(S, E)$. В частности, если S ещё и выпуклое множество, то функция

$$z \mapsto d_E(z) - \frac{1}{2\text{dist}(S, E)}|z|^2 \quad \text{вогнута на } S. \quad (6.37)$$

5. Если множество E удовлетворяет условию внутренней сферы для некоторого $r > 0$, то функция d_E полувогнута на замыкании в \mathbb{C} множества $\mathbb{C} \setminus E$ с постоянной полувогнутости, равной $1/r$.

¹¹interior sphere condition

¹²exterior sphere condition

6. d_E не может быть локально полувогнутой на всей плоскости \mathbb{C} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть $\emptyset \neq E \subset \mathbb{C}$ замкнутое в \mathbb{C} ; $\mathcal{O}' := \mathbb{C} \setminus E$.

1. Функция d_E^2 — δ -субгармоническая на \mathbb{C} с зарядом Рисса $\nu_{d_E^2} \leq \frac{2}{\pi}\lambda$ на \mathbb{C} , где, как и выше, λ — мера Лебега на \mathbb{C} .
2. Функция d_E — δ -субгармоническая на \mathcal{O}' . При этом для любого выпуклого подмножества $S \subset \mathcal{O}'$ при условии $\text{dist}(S, E) > 0$ её заряд Рисса ν_{d_E} удовлетворяет условию $\nu_{d_E} \leq \frac{1}{\pi \text{dist}(S, E)}\lambda$ на S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Из п. 3 Свойств функция $z \mapsto d_E^2(z) - |z|^2$ — вогнутая и, в частности, супергармоническая на \mathbb{C} , а оператор Лапласа от неё отрицателен в смысле распределений. Следовательно, d_E^2 — разность выпуклых функций, первая из которых $z \mapsto |z|^2$, т.е. $d_E^2 \in \delta\text{-sbh}(\mathbb{C})$ с зарядом Рисса $\nu_{d_E^2} := \frac{1}{2\pi}\Delta d_E^2 \leq \frac{1}{2\pi}\Delta| \cdot |^2 = \frac{2}{\pi}\lambda$.

2. Из п. 4 Свойств d_E — δ -субгармоническая функция в каждом, конечно же, выпуклом круге $D(z, r) \Subset \mathcal{O}'$, а значит и на \mathcal{O}' . На каждом выпуклом S при условии $\text{dist}(S, E) > 0$ функция из (6.37) супергармоническая, и тогда для заряда Рисса ν_{d_E} функции $d_E \in \delta\text{-sbh}(S)$ в смысле теории распределений имеем

$$\nu_{d_E} := \frac{1}{2\pi}\Delta d_E \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2 \text{dist}(S, E)} \Delta| \cdot |^2 = \frac{1}{\pi \text{dist}(S, E)}\lambda.$$

Л. Функция $F \circ \log(1/d_E)$. Далее будут использованы, наряду с рассмотренной в пп. D, и другие возможные версии мажорант M на D , зависящих только от функции расстояния d_E , когда $E = \mathbb{C}D$ — дополнение области D до \mathbb{C}_∞ или $E \subset \partial D$ — часть границы области D (см. и ср. [25]–[31]).

Для непустого собственного замкнутого подмножества $E \subset \mathbb{C}_\infty$ продолжаем использовать обозначения (6.32)–(6.33) в предположении, что $E \neq \{\infty\}$. Как и в [67; Примеры], рассмотрим функции

$$z \mapsto \log |z|, \quad z \mapsto \log^+ |z|, \quad z \mapsto \log(1 + |z|), \quad z \in \mathbb{C},$$

субгармонические в \mathbb{C} . Суперпозиции этих функций с любой функцией $h \in \text{Hol}(\mathcal{O})$, т.е. $\log |h|$, $\log^+ |h|$, $\log(1 + |h|)$ — субгармонические, а две последние ещё и непрерывные функции в $\mathcal{O} \stackrel{(6.33\text{O})}{=} \mathbb{C}_\infty \setminus E$ [7; Следствие 2.5.7]. Следовательно, точные верхние грани этих функций при $h_w(z) := \frac{1}{w-z}$ по индексу $w \in E$, равные соответственно

$$\log \frac{1}{d_E}, \quad \log^+ \frac{1}{d_E} \geq 0, \quad \log\left(1 + \frac{1}{d_E}\right) \geq 0, \quad (6.38)$$

будучи непрерывными, также являются субгармоническими функциями на \mathcal{O} . Эти функции, если исключить постоянные, можно считать в определенном смысле субгармоническими функциями на \mathcal{O} минимального роста вблизи $\partial\mathcal{O}$ при условии зависимости их исключительно от функции расстояния d_E .

Если $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — возрастающая выпуклая функция, то по Теореме C(ii) субгармонична и суперпозиция функции F с любой из трёх функций (6.38). Традиционные степенная и экспоненциальная функции F .

[p] При $p \in [1, +\infty)$ — субгармоническая суперпозиция степенной функции $x \mapsto x^p$, $x \in \mathbb{R}^+$, с функциями из (6.38):

$$\left(\log^+ \frac{1}{d_E}\right)^p \geq 0 \quad \text{или} \quad \log^p\left(1 + \frac{1}{d_E}\right) \geq 0, \quad (6.39)$$

[e] При $p \geq 0$ — субгармоническая суперпозиция экспоненциальной функции $x \mapsto \exp(px)$, $x \in \mathbb{R}$, с функциями из (6.38), из которых выпишем только суперпозицию с первой функцией:

$$\left(\frac{1}{d_E}\right)^p = \exp\left(p \log \frac{1}{d_E}\right). \quad (6.40)$$

Функции из (6.38) отличаются друг от друга вблизи границы $\partial\mathcal{O}$ не более чем на константу. Тогда суперпозиции F с функциями из (6.38) в рамках рассматриваемой тематики различаются вблизи $\partial\mathcal{O}$ несущественно, если выпуклая функция F растёт не быстрее экспоненциальной функции, см. (6.39)–(6.40). Поэтому здесь разбирается только случай суперпозиции

$$F \circ \log \frac{1}{d_E} \in \text{sbh}(D), \quad (6.41)$$

с выпуклой возрастающей функцией $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^2 .

Предположим, что функция расстояния d_E из класса C^2 в некотором открытом подмножестве открытого множества \mathcal{O} , реализации чего см. в Свойствах 1–2 функции расстояния из пп. **d**. Плотность меры Рисса $\nu_{F \circ \log \frac{1}{d_E}}$ функции (6.41) относительно меры Лебега λ на таком подмножестве определяется любым из равных друг другу выражений

$$\begin{aligned} d\nu_{F \circ \log \frac{1}{d_E}} &= \frac{1}{2\pi} \Delta(F \circ (-\log d_E)) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \nabla \cdot (-F'(-\log d_E) \nabla \log d_E) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} F''(-\log d_E) |\nabla \log d_E|^2 d\lambda + \frac{1}{2\pi} F'(-\log d_E) \Delta \log \frac{1}{d_E} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} F''(-\log d_E) \frac{|\nabla d_E|^2}{d_E^2} d\lambda - \frac{1}{2\pi} F'(-\log d_E) \frac{d_E \nabla^2 d_E - |\nabla d_E|^2}{d_E^2} d\lambda \\ &\stackrel{(6.36)}{=} \frac{1}{2\pi} (F''(-\log d_E) + (1 - d_E \Delta d_E) F'(-\log d_E)) \frac{1}{d_E^2} d\lambda. \end{aligned} \quad (6.42)$$

DL. Случай $E = \mathbb{C}_\infty \setminus D$ и мажоранты $M := F \circ \log(1/d_E)$. В этом пп. **DL** рассматриваем только области D , удовлетворяющие условию 1g, в частности, с границей класса C^2 . Из вычислений оператора Лапласа в (6.42) по аналогии с Теоремами 8–10 легко следует

ТЕОРЕМА 12. Пусть $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция класса C^2 и функция $u \in \text{sbh}(D) \setminus \{-\infty\}$ удовлетворяет неравенству $u \leq M := F \circ (-\log d_{\mathbb{C}_D})$ на D ; постоянные $0 < b_0 \leq 1 \leq B_0 < +\infty$ из (5.9) и соотношения (5.11) Предложения 5.5; $b \in \mathbb{R}^+$. Тогда найдутся подобласть $D_0 \Subset D$ и постоянные числа $0 < a \leq 1 \leq A < +\infty$ и $C, \overline{C}_M \in \mathbb{R}^+$ вида (1.16), с которыми

- (а) для любой выпуклой возрастающей функции $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ с $f(0) = 0$ при $t_0 := B_0 \sup_{\partial D_0} d_{\mathbb{C}D}$ и $f(t_0) \leq b$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus D_0} f(b_0 d_{\mathbb{C}D}) d\nu_u &\leq \frac{1}{B_0^2} f(d_{\mathbb{C}D}) \frac{1}{2\pi} (F''(-\log d_{\mathbb{C}D}) \\ &+ (1 - d_{\mathbb{C}D} \Delta d_{\mathbb{C}D}) F'(-\log d_{\mathbb{C}D})) \frac{1}{d_{\mathbb{C}D}^2} d\lambda + C\overline{C}_M - Cu(z_0); \end{aligned} \quad (6.43)$$

- (б) для любой выпуклой убывающей функции $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ с правой производной $f'_{\text{right}}(0) < +\infty$ и с $f(0)B_0 \sup_{\partial D_0} d_{\mathbb{C}D} \leq b$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus D_0} d_{\mathbb{C}D} f\left(\frac{1}{b_0 d_{\mathbb{C}D}}\right) d\nu_u &\leq \frac{1}{b_0 B_0^2} f(d_{\mathbb{C}D}) \frac{1}{2\pi} (F''(-\log d_{\mathbb{C}D}) \\ &+ (1 - d_{\mathbb{C}D} \Delta d_{\mathbb{C}D}) F'(-\log d_{\mathbb{C}D})) \frac{1}{d_{\mathbb{C}D}^2} d\lambda + C\overline{C}_M - Cu(z_0). \end{aligned} \quad (6.44)$$

В частности, если интеграл в правой части (6.43) или (6.44) конечен, то конечен и интеграл в левой части соответственно (6.43) или (6.44). Для $u = \log|h|$ с ненулевой функцией $h \in \text{Hol}(D)$, обращающейся в нуль на $Z = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset D$, левая часть (6.43) или (6.44) будет соответственно выглядеть как сумма $\sum_{z_k \in D \setminus D_0} f(b_0 d_{\mathbb{C}D}(z_k))$ или $\sum_{z_k \in D \setminus D_0} d_D(z_k) f(1/b_0 d_{\mathbb{C}D}(z_k))$.

DLE. Случай строгого включения $E \subset \partial D$ и мажоранты $M := F \circ \log(1/d_E)|_D$. Области D и замкнутому непустому подмножеству $E \subset \partial D$ сопоставим расширение области D до области

$$\widehat{D}_E = D \bigcup \left\{ D(z, r(z)) : z \in \partial D \setminus E, r(z) := \text{dist}(z, E) \right\} \supset D. \quad (6.45)$$

Кроме того, расстояния $\text{dist}(\cdot, E)$ или $\text{dist} d(\cdot, \partial D)$ будем обозначать и через $d_D(\cdot, E)$ или $d_D(\cdot, \partial D)$, где соответственно \cdot — точки из области D и только.

ТЕОРЕМА 13. В обозначениях (6.32), (6.41), (6.45) и соглашениях об области D и функции F данного п. 6.2.3 предположим ещё, что как область D , так и её расширение \widehat{D}_E удовлетворяют условию 1g или одновременно паре условий 2g–3g из п. 5.1.5. Пусть $u \in \text{sbh}(D)$ с $u(z_0) \neq -\infty$ и мерой Рисса ν_u с ограничением $u \stackrel{(6.32)}{\leq} F \circ (-\log d_E)$ на $D \setminus D_0$. Тогда для любого числа $b \in \mathbb{R}^+$ найдутся постоянные C, \overline{C}_M вида (1.16), с C , зависящей и от E , с которыми для любой выпуклой убывающей функции $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, b]$ с правой производной $f'_{\text{right}}(0) < +\infty$, можно подобрать числа $0 < a \leq 1 \leq A < +\infty$, зависящие

только от D , z_0 и E , так, что в обозначениях (6.32)

$$\begin{aligned} & \int_{D \setminus D_0} d_D(\cdot, \partial D) f \left(A \frac{d_D(\cdot, E)}{d_D(\cdot, \partial D)} \right) d\nu_u \stackrel{(6.41)-(6.42)}{\leq} \\ & A \int_{D \setminus D_0} d_D(\cdot, \partial D) f \left(a \frac{d_D(\cdot, E)}{d_D(\cdot, \partial D)} \right) \frac{1}{2\pi} (F''(-\log d_E) + (1 - d_E \Delta d_E) F'(-\log d_E)) \frac{1}{d_E^2} d\lambda \\ & + C \overline{C}_M - C u(z_0). \quad (6.46) \end{aligned}$$

В частности, если интеграл в правой части (6.46) конечен, то конечен и интеграл в левой части (6.46). Для $u = \log |h|$ с ненулевой функцией $h \in \text{Hol}(D)$, обращающейся в нуль на $Z = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset D$, левая часть (6.46) будет выглядеть как сумма

$$\sum_{z_k \in D \setminus D_0} d_D(z_k, \partial D) f \left(A \frac{d_D(z_k, E)}{d_D(z_k, \partial D)} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условии 1g или паре условий 2g–3g из п. 5.1.5 область $D \Subset \mathbb{C}$ регулярна, а граница $\partial \widehat{D}_E$ неполярна. Таким образом, существуют как функция Грина $g_D := g_D(\cdot, z_0)$ для D , так и функция Грина $g_{\widehat{D}_E} := g_{\widehat{D}_E}(\cdot, z_0)$ для \widehat{D}_E , выбранная с тем же полюсом z_0 . Функция f может быть продолжена на \mathbb{R} как выпуклая убывающая. По Предложению 5.1 функция $g_D f(g_{\widehat{D}_E}/g_D)$ тестовая и принадлежит классу $\text{sbh}_0^+(D \setminus D_0; \leq b_0 b)$, где $b_0 = \sup_{z \in D_0} g_D(z, z_0)$ зависит только от D , D_0 и z_0 . По Теореме 1 в условиях доказываемой теоремы найдутся требуемые постоянные C, \overline{C}_M , с которыми

$$\begin{aligned} & \int_{D \setminus D_0} g_D f \left(\frac{g_{\widehat{D}_E}}{g_D} \right) d\nu_u \leq \int_{D \setminus D_0} g_D f \left(\frac{g_{\widehat{D}_E}}{g_D} \right) d\nu_M + C \overline{C}_M - C u(z_0) \\ & \stackrel{(6.41)-(6.42)}{=} \int_{D \setminus D_0} g_D f \left(\frac{g_{\widehat{D}_E}}{g_D} \right) Q_{F,D,E} d\lambda + C \overline{C}_M - C u(z_0), \quad (6.47) \end{aligned}$$

где для краткости введено обозначение

$$Q_{F,D,E} \stackrel{(6.42)}{=} \frac{1}{2\pi} (F''(-\log d_E) + (1 - d_E \Delta d_E) F'(-\log d_E)) \frac{1}{d_E^2}.$$

По Предложению 5.4 с некоторыми постоянными $0 < a' \leq 1 \leq A' < +\infty$, связанными только с D , E , z_0 , имеем

$$g_D f \left(A' \frac{\text{dist}(\cdot, \partial \widehat{D}_E)}{\text{dist}(\cdot, \partial D)} \right) \leq g_D f \left(\frac{g_{\widehat{D}_E}}{g_D} \right) \leq g_D f \left(a' \frac{\text{dist}(\cdot, \partial \widehat{D}_E)}{\text{dist}(\cdot, \partial D)} \right) \quad (6.48)$$

на $D \setminus D_0$. Для области \widehat{D}_E по её построению (6.45) выполняются равенства

$$d_D(z, E) \stackrel{(6.32)}{=} \text{dist}(z, E) = \text{dist}(z, \partial \widehat{D}_E) \quad \text{для всех } z \in D.$$

Поэтому (6.48) может быть переписано в виде

$$g_D f \left(A' \frac{d_D(\cdot, E)}{d_D(\cdot, \partial D)} \right) \leq g_D f \left(\frac{g_{\widehat{D}_E}}{g_D} \right) \leq g_D f \left(a' \frac{d_D(\cdot, E)}{d_D(\cdot, \partial D)} \right) \quad \text{на } D \setminus D_0$$

Из этих неравенств и (6.47) следует

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus D_0} g_D f \left(A' \frac{d_D(\cdot, E)}{d_D(\cdot, \partial D)} \right) d\nu_u \\ \leq \int_{D \setminus D_0} g_D f \left(a' \frac{d_D(\cdot, E)}{d_D(\cdot, \partial D)} \right) Q_{F,D,E} d\lambda + C \overline{C}_M - C u(z_0). \end{aligned}$$

Отсюда согласно верхним и нижним оценкам (5.9) на функцию Грина g_D , подбирая достаточно большие $A \geq 1$ и малые $a > 0$, а также меняя $C \geq 0$, получаем требуемое равномерное по указанным f неравенство (6.46).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.6. Подобные результаты из Теоремы 1 можно получить и через гиперболический радиус, используя тестовые функции из подраздела 5.1.4, их оценки в подразделе 5.1.5 через функцию расстояния (Предложение 5.6 и замечание после него) для мажорант-суперпозиций из подраздела 6.2.2, строящихся через гиперболический радиус. Последняя Теорема 13 близка и даже параллельна части исследований [25]–[29], обобщает их, но без увязки наших результатов с возможно тонкой геометрией строгого подмножества E по отношению относительно простой границы области $D = \mathbb{D}$, как это сделано в разных вариантах в [25]–[29] и некоторых последующих работах С. Ю. Фаворова.

6.2.4. Перспективы и заключительные замечания. Дальнейшее развитие —

- интегральные версии основных результатов данной статьи, в которых поточечные ограничения посредством мажоранты M заменяются ограничениями на интегралы с весом, на пути распространения обобщённой формулы Пуассона–Йенсена (2.12) из Предложения 2.3 на тестовые функции из Определения 1 и их меры Рисса на основе той или иной степени реализации Гипотезы 1;
- перенос результатов на области D в \mathbb{R}^m , $m \in \mathbb{N}$, с применениями к оценкам объёмов, или $(2n - 2)$ -мер Хаусдорфа, нулевых множеств голоморфных функций f (с учётом кратности) с ограничениями на их рост в псевдовыпуклой области $D \subset \mathbb{C}^n$ через известную классическую формулу Пуанкаре–Лелона, напрямую, — с коэффициентом, зависящим только от n , — связывающей эти объёмы с мерой Рисса (плюри-)субгармонической функции $\log |f|$.

Их изложение будет дано в планируемых последующих наших работах.

Последний многомерный субгармонический вариант развития наших результатов поддаётся реализации без существенного роста сложностей. «Плюри-субгармонический» же перенос результатов на псевдовыпуклые области в \mathbb{C}^n для плюрисубгармонической мажоранты M , основанный на плюрисубгармоничности по существу, более сложен, но всё же вполне перспективен на основе комплексной теории потенциала и аналитических дисков [7], [32], [43], [55], [56].

При этом будут важны именно равномерные относительно мажоранты M оценка (2.4) в Основной Теореме и явная форма постоянных C в (2.3) и \overline{C}_M в (2.4C) из Основной Теоремы, для чего только мы и прослеживали в подготовительных результатах к ней и её доказательстве вид этих постоянных.

Список литературы

- [1] Th. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [2] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966.
- [3] У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции*, Мир, М., 1980.
- [4] W. K. Hayman, *Subharmonic functions*, II, Academic Press, London, 1989.
- [5] Lars Hörmander, *Notions of Convexity*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston, 1994.
- [6] J. L. Doob, *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart*, Springer-Verlag, N.-Y., 1984.
- [7] M. Klimek, *Pluripotential Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1991.
- [8] С. Стойлов, *Теория функций комплексного переменного*, пер. с рум., **2**, ИЛ, М., 1962.
- [9] M. G. Arsove, "Functions representable as differences of subharmonic functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 327–365.
- [10] А. Ф. Гришин, Нгуен Ван Куинь, И. В. Поединцева, "Теоремы о представлении δ -субгармонических функций", Серия «Математика, прикладная математика и механика», № 1133, 2014, 56–75, <http://vestnik-math.univer.kharkov.ua/Vestnik-KhNU-1133-2014-grish.pdf>.
- [11] B. Khabibullin, N. Tamindarova, "On Distribution of Zeros of Holomorphic Functions: Blaschke-type Conditions", *Материалы международной научно-практической конференции «Комплексный анализ и его приложения»*, 16–19 июня, Брянский государственный университет, Брянск, 2015, 67–73, <http://arxiv.org/abs/1505.05715>.
- [12] P. Colwell, *Blaschke Products*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1985.
- [13] М. М. Джрбашян, "Теория факторизации и граничных свойств функций, мероморфных в круге", *УМН*, **28:4(172)** (1973), 3–14.
- [14] Ф. А. Шамоян, "О нулях аналитических в круге функций, растущих вблизи границы", *Изв. АН Арм. ССР. Математика.*, **XVIII:1** (1983), 15–27.
- [15] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman spaces*, Graduate Texts in Mathematics, **199**, Springer-Verlag, N.-Y., 2000.
- [16] Б. Н. Хабибуллин, "Нулевые подмножества, представление мероморфных функций и характеристики Неванлинны в круге", *Матем. сб.*, **197:2** (2006), 117–136.
- [17] А. А. Гольдберг, Б. Я. Левин, И. В. Островский, "Целые и мероморфные функции", *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундамент.*, **85**, ВИНТИ, М., 1991, 5–185.
- [18] Levin B. Ya., *Lectures on entire functions. Transl. Math. Monographs*, **150**, Amer. Math. Soc, Providence RI, 1996.
- [19] Б. Н. Хабибуллин, "Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной", *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **55:5** (1991), 1101–1123.
- [20] Б. Н. Хабибуллин, "Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка", *Матем. сб.*, **182:6** (1991), 811–827.
- [21] Б. Н. Хабибуллин, "О типе целых и мероморфных функций", *Матем. сб.*, **183:11** (1992), 35–44.

- [22] Б. Н. Хабибуллин, *Полнота систем экспонент и множества единственности*, издание 4-ое, дополненное, **2**, РИЦ БашГУ, Уфа, 2012.
- [23] Б. Н. Хабибуллин, “Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции”, *Матем. сб.*, **200**:2 (2009), 129–158.
- [24] A. A. Kondratyuk, Ya. V. Vasylykiv, “Growth majorants and quotient representations of meromorphic functions”, *CMFT – Computational Methods and Function Theory*, **1**:2 (2001), 595–606.
- [25] A. Borichev, L. Golinskii, S. Kupin, “A Blaschke-type condition and its application to complex Jacobi matrices”, *Bull. London Math. Soc.*, **41** (2009), 117–123.
- [26] S. Favorov, L. Golinskii, “A Blaschke-type condition for analytic and subharmonic functions and application to contraction operators”, *Amer. Math. Soc. Transl.*, **226**:2 (2009), 37–47.
- [27] S. Yu. Favorov, L. B. Golinskii, “Blaschke-Type Conditions for Analytic and Subharmonic Functions in the Unit Disk. Local Analogs and Inverse Problems”, *CMFT – Computational Methods and Function Theory*, **12**:1 (2012), 151–166.
- [28] S. Ju. Favorov, L. D. Radchenko, “On Analytic and Subharmonic Functions in Unit Disc Growing Near a Part of the Boundary”, *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.*, **9**:3 (2013), 304–315.
- [29] L. Golinskii, S. Kupin, “A Blaschke-type condition for analytic functions on finitely connected domains. Applications to complex perturbations of a finite-band selfadjoint operator”, *J. Math. Anal. Appl.*, **389**:2 (2012), 705–712.
- [30] S. Favorov, L. Golinskii, “Blaschke-type conditions in unbounded domains, generalized convexity and applications in perturbation theory”, *Rev. Matem. Iberoamericana*, **31**:1 (2015), 1–32, <http://arxiv.org/pdf/1204.4283.pdf>.
- [31] С. Ю. Фаворов, Л. Д. Радченко, “Мера Рисса функций, субгармонических во внешности компакта”, *Математичні Студії*, **40**:2 (2013), 149–158.
- [32] Б. Н. Хабибуллин, “Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:5 (2001), 167–190.
- [33] Л. Ю. Чередникова, “Последовательности неединственности для весовых алгебр голоморфных функций в единичном круге”, *Матем. заметки*, **77**:5 (2005), 775–787.
- [34] Б. Н. Хабибуллин, “Последовательности нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций и гармонические миноранты”, *Матем. сб.*, **198**:2 (2007), 121–160.
- [35] Б. Н. Хабибуллин, Ф. Б. Хабибуллин, Л. Ю. Чередникова, “Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. I”, *Алгебра и анализ*, **20**:1 (2008), 146–189.
- [36] Б. Н. Хабибуллин, Ф. Б. Хабибуллин, Л. Ю. Чередникова, “Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. II”, *Алгебра и анализ*, **20**:1 (2008), 190–236.
- [37] Е. Г. Кудашева, Б. Н. Хабибуллин, “Распределение нулей голоморфных функций умеренного роста в единичном круге и представление в нем мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **200**:9 (2009), 95–126.
- [38] B. N. Khabibullin, “Generalizations of Nevanlinna’s Theorems”, *Математичні Студії*, **34**:2 (2010), 197–206, http://www.vntl.com/im/pdf/34_2_197_206.pdf.
- [39] T. W. Gamelin, *Uniform Algebras and Jensen Measures*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1978.
- [40] P. Koosis, *Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin*, Les Publications CRM, Montréal, 1996.

- [41] Ransford T. J., *Jensen measures*, in: Approximation, Complex Analysis, and Potential Theory (Montréal, QC, 2000), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem. **37**, Kluwer, 2001, 221–237.
- [42] B. J. Cole, T. J. Ransford, “Subharmonicity without upper semicontinuity”, *J. Func. Anal.*, **147** (1997), 420–442.
- [43] B. J. Cole, T. J. Ransford, “Jensen measures and harmonic measures”, *J. Reine Angew. Math.*, **541** (2001), 29–53.
- [44] Б. Н. Хабибуллин, “Меры Йенсена на открытых множествах”, *Вестник Башкирского университета*, **2** (1999), 3–6.
- [45] Б. Н. Хабибуллин, “Критерии (суб-)гармоничности и продолжение (суб-)гармонических функций”, *Сиб. матем. журн.*, **44**:4 (2003), 905–925.
- [46] Б. Н. Хабибуллин, “Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций”, *Матем. заметки*, **66**:4 (1999), 603–616.
- [47] D. Sarason, “Representing Measures for $R(X)$ and Their Green’s Functions”, *J. Func. Analysis*, **7** (1971), 359–385.
- [48] S. L. Anderson, “Green’s Function, Jensen Measures, and Bounded Point Evaluations”, *J. Func. Analysis*, **43** (1981), 360–367.
- [49] J. Bliedtner, W. Hansen, *Potential Theory – An Analytic and Probabilistic Approach to Balayage*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-N.Y.-Tokyo, 1986.
- [50] Б. Н. Хабибуллин, “Нули голоморфных функций с ограничениями на рост в области”, *Исследования по математическому анализу*, Математический форум (Итоги науки. Юг России), **3**, Владикавказский научный центр РАН и РСО–А, Владикавказ, 2009, 282–291, <http://elibrary.ru/download/90353677.pdf>.
- [51] В. Khabibullin, T. Baiguskarov, “Holomorphic minorants of (pluri-)subharmonic functions”, *Материалы Всероссийской научной конференции «Алгебра, анализ и смежные вопросы математического моделирования»*, 26–27 June, Владикавказ, 2015, 67–70, <http://arxiv.org/pdf/1506.01746.pdf> (развернутое изложение принято к печати в «Функциональный анализ и его приложения»).
- [52] Т. Ю. Байгускаров, Б. Н. Хабибуллин, “Голоморфные миноранты плурисубгармонических функций”, *Функц. анализ и его прил.*, **50**:1 (2016), 76–79; *Funct. Anal. Appl.*, **50**:1 (2016), 62–65.
- [53] Б. Н. Хабибуллин, Т. Ю. Байгускаров, “Логарифм модуля голоморфной функции как миноранта для субгармонической функции”, *Матем. заметки*, **99**:4 (2016), 588–602.
- [54] W. Hansen, I. Netuka, “Convexity properties of harmonic measures”, *Adv. Math.*, **218**:4 (2008), 1181–1223.
- [55] E. A. Poletsky, “Holomorphic currents”, *Indiana Univ. Math. J.*, **42** (1993), 85–144.
- [56] E. A. Poletsky, “Disk envelopes of functions II”, *J. Funct. Anal.*, **163** (1999), 111–132.
- [57] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974.
- [58] Л. Шварц, *Анализ*, **I**, Наука, М., 1967.
- [59] А. А. Кондратюк, *Ряды Фурье и мероморфные функции*, Вища школа. Изд-во при Львовском университете, Львов, 1988.
- [60] F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths, *Schwarz-Pick Type Inequalities*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2009.
- [61] Ф. Г. Авхадиев, “Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения”, **206**:12 (2015), 3–28.
- [62] E. Wojcicka, *Functions of bounded characteristic in multiply connected domains*, Doctoral Dissertation, Univ. of South Carolina, 1985.
- [63] M. Stoll, “A characterization of Hardy–Orlicz spaces on planar domains”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **117**:4 (1993), 1031–1038.

- [64] K.-O. Widman, “Inequalities for the Green’s function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations”, *Math. Scand.*, **21** (1967), 17–37.
- [65] М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, “Об одной оценке для функции Грина”, *Докл. Акад. наук СССР*, **24** (1939), 102–103.
- [66] Yu. Riihenta, “Convex Functions and Subharmonic Functions”, *Potential Analysis*, **5** (1996), 301–309.
- [67] Ф. Б. Хабибуллин, “Устойчивость (под)последовательностей нулей для классов голоморфных функций умеренного роста в единичном круге”, *Уфимск. матем. журн.*, **3**:3 (2011), 152–163.
- [68] P. Cannarsa, C. Sinestrari, *Semiconcave Functions, Hamilton–Jacobi Equations, and Optimal Control*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, **58**, Birkhäuser, Boston, 2004.
- [69] Ch. Nour, R. J. Stern, J. Takche, “The union of uniform closed balls conjecture”, *Control and Cybernetics*, **38**:4B (2009), 1525–1534.
- [70] P. Albano, P. Cannarsa, Khai T. Nguyen, C. Sinestrari, “Singular gradient flow of the distance function and homotopy equivalence”, *Math. Annalen*, **356**:1 (2013), 23–43.
- [71] Д. Гилбарт, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными*, Наука, М., 1989.

Б. Н. Хабибуллин (B. N. Khabibullin)
Башкирский государственный университет
E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Поступила в редакцию
25.12.2015

Н. Р. Таминдарова (N. R. Tamindarova)
Башкирский государственный университет
E-mail: dds5@mail.ru